5 Лекция 5. Линейные уравнения на прямой

5.1 Линейные однородные уравнения на прямой

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = a(t)x, \ a \in C^0(I), \ x \in \mathbb{R}^1 \tag{1}$$

Оно равносильнь уравнению

$$(\ln x)^{\cdot} = a(t).$$

Следовательно,

$$x(t) = Ce^{A(t)}, \text{ где } A' = a \tag{2}$$

(A - первообразная от a, определенная с точночтью до аддитивной константы). Если $A(t_0) = 0$, то

$$x(t) = e^{A(t)}x(t_0).$$

5.2 Линейные неоднородные уравнения на прямой

Начнем со следующего простого предложения.

Предложение 1 *Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:*

$$x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{част}}(t) + C\varphi(t), \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ — решение однородного уравнения (1)*, $x_{\text{част}}$ — частное решение (то есть какое-то одно решение) неоднородного уравнения.*

Это предложение является частным случаем чрезвычайно общего факта: *пространство решений линейного неоднородного уравнения любой природы: алгебраического, обыкновенного дифференциального, в частных производных и т. д. является аффинным пространством, с которым ассоциировано пространство решений соответствующего линейного однородного уравнения.*

Другими словами, *общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

5.3 Метод вариации постоянной

Любое решение однородного линейного уравнения имеет вид $C\varphi(t)$, где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Будем подбирать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$x_{\text{част}}(t) = C(t)\varphi(t), \text{ где } x_{\text{част}}(t_0) = 0$$

— *проварьируем* постоянную C. Мы получаем следующее уравнение на функцию $C(t)$:

$$\dot{C}(t)\varphi(t) + C(t)\dot{\varphi}(t) = a(t)C(t)\varphi(t) + b(t), \quad C(t_0) = 0. \tag{4}$$

Но функция φ удовлетворяет однородному уравнению:

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t),$$

откуда

$$\dot{C}(t)\varphi(t) = b(t).$$

Следовательно,

$$\dot{C}(t) = \varphi(t)^{-1}b(t), \quad C(t_0) = 0.$$

Частное решение $x_{\text{част}}(t)$ неоднородного уравнения находится теперь с помощью теоремы Ньютона—Лейбница. Более подробно,

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau;$$

итак, частное решение линейного неоднородного уравнения равно

$$x_{\text{част}}(t) = \varphi(t)C(t) = \varphi(t)\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau. \tag{5}$$

В силу предложения 1, общее решение неоднородного уравнения равно

$$x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{част}}(t) + C\varphi(t).$$

Окончательно,

$$x_{\text{общ}}(t) = \left(C + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau \right) \varphi(t),$$

где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Из этой формулы, в частности, следует, что решения линейных уравнений определены на всей области определения его коэффициентов.

5.4 Линейные уравнения с периодическими коэффициентами: преобразование монодромии

Рассмотрим линейное неавтономное уравнение с периодическими коэффициентами и общим периодом T. Определим "преобразование монодромии M за период". Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t, x_0)$ - решение уравнения

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \; a(t+T) \equiv a(t), \; b(t+T) \equiv b(t) \tag{6}$$

с начальным условием $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Тогда преобразование M определяется как

$$M(x_0) = \varphi(T, x_0). \tag{7}$$

Предложение 2 *Преобразование монодромии M аффинно:*

$$M(x) = Ax + B,$$

причем

$$A = \int_0^T a(t)dt. \tag{8}$$

Доказательство Пусть $\psi(t)$ - частное решение уравнения (5), а

$$\varphi_{\text{одн}}(t) = \varphi_{\text{одн}}(0)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

- общее решение однородного уравнения. Тогда

$$\varphi(t, x_0) = \psi(t) + \varphi_{\text{одн}}(t),$$

где

$$x_0 = \varphi(0, x_0) = \psi(0) + \varphi_{\text{одн}}(0).$$

Следовательно,

$$\varphi_{\text{одн}}(0) = x_0 - \psi(0).$$

Тогда

$$\varphi(t, x_0) = \psi(t) + (x_0 - \psi(0))e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}.$$

Следовательно,

$$M(x_0) = \psi(T) + (x_0 - \psi(0))A,$$

где A дается формулой (8). $\square$

5.5 Линейные уравнения с периодическими коэффициентами: периодические решения

Начальные условия периодических решений - это неподвижные точки преобразований монодромии.

Что можно сказать о неподвижных точках произвольного аффинного отображения прямой, сохраняющего ориентацию:

$$g\colon x \mapsto Ax + B,$$

где $A > 0$?

1. Общий случай: $A \neq 1$.

   В этом случае преобразование g — растяжение с коэффициентом A относительно неподвижной точки $x_0 = \frac{B}{1-A}$.

2. Вырожденный случай: $A = 1$. В этом случае $g : x \mapsto x + B$ — перенос.
   (a) Невырожденный (типичный) перенос: $B \neq 0$. Неподвижных точек нет.
   (b) Вырожденный перенос: $B = 0$. Преобразование g тождественно, и все точки неподвижны.

Теорема 1 *Линейное одномерное дифференциальное уравнение с непрерывными T-периодическими коэффициентами имеет единственное T-периодическое решение, если и только если интеграл по периоду от коэффициента при линейном члене отличен от нуля:*

$$\int_0^T a(\tau)d\tau \neq 0.$$

Доказательство Преобразование монодромии уравнения (6) аффинно и имеет вид

$$x \mapsto Ax + B, \quad \text{где } A = e^I,\ I = \int_0^T a(t)dt$$

. Оно имеет единственную неподвижную точку, если и только если $A \neq 1$, т.е. $I \neq 0$. $\square$

Эта теорема позволяет легко узнавать уравнения вида (6) с единственным периодическим решением. Она же позволяет исследовать периодические решения уравнения (6) даже тогда, когда интегралы, выражающие его решение, не берутся.

5.6 Пример исследования периодического решения

Проблема 1 *При каких a уравнение*

$$\dot{x} = (\sin t - a)x + \cos t \tag{9}$$

имеет хотя бы одно 2π-периодическое решение?

Решение. По теореме 1, при $a \neq 0$ периодическое решение единственно. При $a = 0$ решение с начальным условием $\varphi(0) = 0$ имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{-\cos t} \int_0^t (\cos \tau) e^{\cos \tau} d\tau.$$

Следовательно,

$$\varphi(2\pi) = e^{-\cos t} \int_0^{2\pi} (\cos t) e^{\cos t} dt.$$

Посмотрев на график подинтегральной функции, можно убедиться, что $\varphi(2\pi) \neq 0$. Преобразование монодромии уравнения (9) имеет вид

$$M(x) = x + \varphi(2\pi).$$

Это нетождественный сдвиг. Периодических решений нет.