Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Хроматический многочлен удовлетворяет соотношению удаления-стягивания

$$\chi_G = \chi_{G'_e} - \chi_{G''_e},$$

где $e \in E(G)$ — произвольное ребро в G (в предыдущей лекции ребро e обозначалось парой своих концов AB). Это соотношение позволяет рекуррентно вычислять хроматический многочлен произвольного графа. Можно определить хроматический многочлен этим условием, условием мультипликативности, и начальным условием — хроматический многочлен простого графа на одной вершине равен c.

Лекция 2. Соотношения удаления-стягивания

Хроматический многочлен удовлетворяет соотношению удаления-стягивания

$$\chi_G = \chi_{G'_e} - \chi_{G''_e},$$

где $e \in E(G)$ — произвольное ребро в G (в предыдущей лекции ребро e обозначалось парой своих концов AB). Это соотношение позволяет рекуррентно вычислять хроматический многочлен произвольного графа. Можно определить хроматический многочлен этим условием, условием мультипликативности, и начальным условием — хроматический многочлен простого графа на одной вершине равен c.

В этой лекции мы опишем *все* инварианты графов, удовлетворяющие соотношению удаления-стягивания. Для этого нам понадобятся эти операции на более широком классе графов — будем разрешать в них петли и кратные ребра. Удаление ребра в таком графе определяется так же, как и для простых графов. Петлю стягивать нельзя — можно стягивать только *звенья*, а стягивание одного из кратных ребер превращает все остальные ребра между этими двумя вершинами в петли с началом и концом в новой вершине.

Хроматический многочлен удовлетворяет соотношению удаления-стягивания

$$\chi_G = \chi_{G'_e} - \chi_{G''_e},$$

где $e \in E(G)$ — произвольное ребро в G (в предыдущей лекции ребро e обозначалось парой своих концов AB). Это соотношение позволяет рекуррентно вычислять хроматический многочлен произвольного графа. Можно определить хроматический многочлен этим условием, условием мультипликативности, и начальным условием — хроматический многочлен простого графа на одной вершине равен c.

В этой лекции мы опишем *все* инварианты графов, удовлетворяющие соотношению удаления-стягивания. Для этого нам понадобятся эти операции на более широком классе графов — будем разрешать в них петли и кратные ребра. Удаление ребра в таком графе определяется так же, как и для простых графов. Петлю стягивать нельзя — можно стягивать только *звенья*, а стягивание одного из кратных ребер превращает все остальные ребра между этими двумя вершинами в петли с началом и концом в новой вершине.

Хроматический многочлен графа с петлей равен 0 (у вершин такого графа не существует правильных окрасок). Хроматический многочлен графа с кратными ребрами не меняется при замене кратных ребер одиночным ребром; поэтому и имеет смысл определять хроматический многочлен только для простых графов.

Лекция 2. Соотношение удаления-стягивания

Definition

Инвариант f графов называется *W-функцией*, если он удовлетворяет соотношению удаления-стягивания
$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e)$$
для любого графа G и любого ребра $e \in E(G)$ в нем.
W-функция f называется *V-функцией* (*инвариантом Татта*), если она мультипликативна, $f(G_1 \sqcup G_2) = f(G_1)f(G_2)$ для любых двух графов G_1, G_2.

Лекция 2. Соотношение удаления-стягивания

Definition

Инвариант f графов называется *W-функцией*, если он удовлетворяет соотношению удаления-стягивания

$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e)$$

для любого графа G и любого ребра $e \in E(G)$ в нем.
W-функция f называется *V-функцией* (*инвариантом Татта*), если она мультипликативна, $f(G_1 \sqcup G_2) = f(G_1)f(G_2)$ для любых двух графов G_1, G_2.

Замена знака $-$ на $+$ не существенна: хроматический многочлен легко превратить в V-функцию, например, заменив его многочленом $G \mapsto (-1)^{|V(G)|}\chi_G(-c)$.

Definition

Инвариант f графов называется *W-функцией*, если он удовлетворяет соотношению удаления-стягивания

$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e)$$

для любого графа G и любого ребра $e \in E(G)$ в нем.
W-функция f называется *V-функцией* (*инвариантом Татта*), если она мультипликативна, $f(G_1 \sqcup G_2) = f(G_1)f(G_2)$ для любых двух графов G_1, G_2.

Замена знака $-$ на $+$ не существенна: хроматический многочлен легко превратить в V-функцию, например, заменив его многочленом $G \mapsto (-1)^{|V(G)|}\chi_G(-c)$.
Всякая W-функция однозначно определяется своими значениями на графах без звеньев.
Всякая V-функция однозначно определяется своими значениями на одновершинных графах.

Definition

Инвариант f графов называется *W-функцией*, если он удовлетворяет соотношению удаления-стягивания

$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e)$$

для любого графа G и любого ребра $e \in E(G)$ в нем.
W-функция f называется *V-функцией* (*инвариантом Татта*), если она мультипликативна, $f(G_1 \sqcup G_2) = f(G_1)f(G_2)$ для любых двух графов G_1, G_2.

Замена знака $-$ на $+$ не существенна: хроматический многочлен легко превратить в V-функцию, например, заменив его многочленом $G \mapsto (-1)^{|V(G)|}\chi_G(-c)$.
Всякая W-функция однозначно определяется своими значениями на графах без звеньев.
Всякая V-функция однозначно определяется своими значениями на одновершинных графах.
Вопрос. Верно ли, что V-функция может принимать любые значения на одновершинных графах?

Например, для графа на рис. есть две различные возможности выбрать удаляемое/стягиваемое ребро e, однако уже на следующем шаге мы с необходимостью приходим к равным линейным комбинациям графов. Верно ли, что так будет всегда? Теорема Татта дает положительный ответ на этот вопрос.

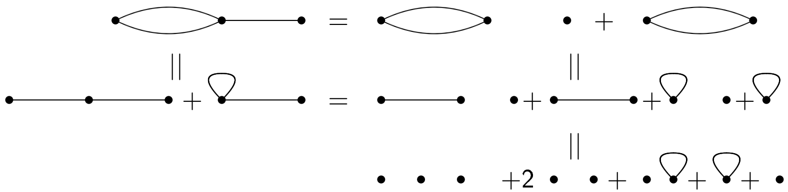

Рис.: Различные последовательности упрощения графа с помощью соотношений Татта

Theorem (Татт)

Для любого набора значений на графах без звеньев (соотв., на одновершинных графах) существует W-функция (соотв., V-функция), принимающая такие значения.

Как мы уже видели раньше, такая функция единственна.

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной* V-функции. Это V-функция со значениями в кольце многочленов $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$ от бесконечного числа переменных, такая, что любую другую V-функцию со значением в произвольном кольце K можно получить подстановкой вместо переменных s_i подходящих элементов кольца K. Элементами кольца $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$ являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных s_i с целыми коэффициентами.

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной* V-*функции*. Это V-функция со значениями в кольце многочленов $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$ от бесконечного числа переменных, такая, что любую другую V-функцию со значением в произвольном кольце K можно получить подстановкой вместо переменных s_i подходящих элементов кольца K. Элементами кольца $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$ являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных s_i с целыми коэффициентами.

Цикломатическим числом (*числом Бетти*) данного связного графа G называется число $b_1(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$. Назовем *остовным подграфом* графа всякий его подграф, содержащий все его вершины. У каждого графа G ровно $2^{|E(G)|}$ остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве ребер. Положим

$$U_G(s_0, s_1, \dots) = \sum_{E' \subset E(G)} s_0^{i_0(G(E'))} s_1^{i_1(G(E'))} \dots . \qquad (1)$$

В правой части формулы суммирование идет по всем подмножествам E' множества ребер $E(G)$; через $G(E')$ обозначен соответствующий остовный подграф, а $i_m(G(E'))$ — число связных компонент в $G(E')$ с цикломатическим числом m (т.е., $i_0(G(E'))$ — число деревьев среди связных компонент, $i_1(G(E'))$ — число связных компонент с одним простым циклом и т.д.).

Lemma

Функция U_G является инвариантом Татта, т.е.

$$U_G = U_{G'_e} + U_{G''_e}$$

для любого графа G и любого звена e в нем.

Прежде, чем доказывать лемму, посмотрим, что означает на практике вычисление функции U_G.

Пусть $G = C_3$ — граф-треугольник. Тогда у него $2^3 = 8$ остовных подграфов. Подграф с пустым множеством ребер содержит три компоненты, каждая с цикломатическим числом 0, поэтому его вклад в функцию U_{C_3} равен s_0^3. Каждый из трех подграфов с одним ребром содержит две компоненты, обе с цикломатическим числом 0. Их общий вклад равен поэтому $3s_0^2$. Аналогично, вклад трех двухреберных подграфов равен $3s_0$. Наконец, сам граф C_3 состоит из одной компоненты связности с цикломатическим числом 1, поэтому его вклад равен s_1. Таким образом,

$$U_{C_3} = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1.$$

Доказательство леммы. Фиксируем граф G и звено e в нем. Остовные подграфы графа G, не содержащие ребро e, находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа G'_e. При этом соответствии подграфы изоморфны, а значит соответствующие им значения $i_0, i_1, \dots$ совпадают. С другой стороны, остовные подграфы графа G, содержащие ребро e, находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа G''_e. При этом соответствии в каждом остовном подграфе в G''_e стягивается одно ребро, что не меняет набора цикломатических чисел его компонент связности. Лемма доказана. □

Покажем, что придавая различные значения переменным s_i мы можем превратить U в V-функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Пусть X_n — одновершинный граф с n. Выпишем значения функции U на X_n:

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2, \dots, U(X_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s_j, \dots .$$

Действительно, в графе X_n имеется 2^n остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из k петель равно $\binom{n}{k}$, и его цикломатическое число равно k.

Покажем, что придавая различные значения переменным s_i мы можем превратить U в V-функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Пусть X_n — одновершинный граф с n. Выпишем значения функции U на X_n:

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2, \dots, U(X_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s_j, \dots .$$

Действительно, в графе X_n имеется 2^n остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из k петель равно $\binom{n}{k}$, и его цикломатическое число равно k. Выразим из этих равенств s_i:

$$s_0 = U(X_0), s_1 = U(X_1) - U(X_0), \dots, s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \dots .$$

Покажем, что придавая различные значения переменным s_i мы можем превратить U в V-функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Пусть X_n — одновершинный граф с n. Выпишем значения функции U на X_n:

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2, \dots, U(X_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s_j, \dots.$$

Действительно, в графе X_n имеется 2^n остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из k петель равно $\binom{n}{k}$, и его цикломатическое число равно k. Выразим из этих равенств s_i:

$$s_0 = U(X_0), s_1 = U(X_1) - U(X_0), \dots, s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \dots.$$

Тем самым, для произвольного набора значений $U(X_j) = t_j$, мы можем восстановить значения s_i, а значит и значение функции U на произвольном графе, положив

$$s_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} t_j.$$

Проверим проведенное выше вычисление значения функции U на графе C_3. Последовательно применяя соотношения Татта, мы заключаем, что

$$C_3 = X_0^3 + 3X_0^2 + 2X_0 + X_1.$$

Отсюда

$$U_{C_3} = U_{X_0}^3 + 3U_{X_0}^2 + 2U_{X_0} + U_{X_1} = s_0^3 + 3s_0^2 + 2s_0 + s_1 + s_0 = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

Полученные результаты означают, что инвариант Татта можно задать, либо подставив в универсальную функцию U_G произвольные значения вместо параметров s_i, либо указав значения инварианта на графах X_n, — любой из этих наборов значений однозначно выражается через другой. Вот что получается при некоторых специальных подстановках.

Example (ребра)

Если мы положим в универсальном инварианте U все $s_i = 1$, то получим V-функцию, принимающую на графе G значение $2^{|E(G)|}$.

Example (дихроматический многочлен и многочлен Татта)

Дихроматический многочлен $Q_G(t,z)$ зависит от двух переменных и определяется подстановкой $s_k = tz^k$ в универсальный инвариант Татта. Как нетрудно видеть, значение дихроматического многочлена на графе X_n равно

$$Q_{X_n}(t,z) = t(1+z)^n,$$

и эти равенства также можно считать его определением.
Подстановка $t=-c$, $z=-1$ превращает дихроматический многочлен в хроматический.
Многочлен Татта графа G определяется формулой

$$T_G(x,y) = (x-1)^{-b_0(G)} Q_G(x-1, y-1),$$

или

$$T_G(x,y) = (x-1)^{-b_0(G)} \sum_{E' \subset E(G)} (x-1)^{b_0(G(E'))}(y-1)^{b_1(G(E'))},$$

где $b_0(G)$ — число компонент связности в G.

Example (эйлеровость)

Вот V-функция со значениями в $\mathbb{Z}_2$, выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется ***эйлеровым***, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение V-функции ε равным 1 на всех графах X_n. Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе G равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.

Example (эйлеровость)

Вот V-функция со значениями в $\mathbb{Z}_2$, выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется ***эйлеровым***, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение V-функции ε равным 1 на всех графах X_n. Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе G равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.
Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что такая функция удовлетворяет соотношению Татта. Эйлеровость графа является ***топологической*** характеристикой — она не меняется при стягивании звена. Поэтому если граф G эйлеров, то граф G_e'' тоже эйлеров для любого звена $e \in E(G)$; напротив, граф G_e' неэйлеров — в нем валентности двух вершин меняются на 1. Если же граф G неэйлеров, причем в нем есть вершина нечетной валентности не на концах ребра e, то и оба графа G_e' и G_e'' неэйлеровы. Если же нечетную валентность имеют лишь оба конца ребра e, то оба графа G_e' и G_e'' эйлеровы. Во всех этих случаях

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_e') + \varepsilon(G_e'').$$

Example (потоковый многочлен)

Подстановка $z = -m$, $t = -1$ превращает дихроматический многочлен в ***потоковый***:

$$F_G(m) = Q_G(-1, -m).$$

Объясним причину такого названия. Обозначим через $\mathbb{Z}_m$ группу вычетов по модулю m. ***Цепью*** над $\mathbb{Z}_m$ в графе G называется формальная линейная комбинация ребер графа G с коэффициентами из $\mathbb{Z}_m$, т.е. элемент группы $\mathbb{Z}_m^{E(G)}$. Ориентируем ребра графа G произвольным образом. ***Границей*** цепи называется формальная линейная комбинация вершин графа G, в которой коэффициент при каждой вершине равен сумме коэффициентов цепи входящих в нее ребер минус сумма коэффициентов выходящих ребер. Цепь называется ***циклом***, если у нее нулевая граница.
Например, граф из двух вершин, соединенных двумя ребрами, допускает две существенно различных ориентации. В обоих случаях цепи имеют вид $a_1 e_1 + a_2 e_2$, где символами e_1, e_2 обозначены (ориентированные) ребра графа, а $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$. Граница такой цепи равна сумме вершин, взятых с коэффициентами $a_1 + a_2, -(a_1 + a_2)$ в случае, если ребра ориентированы одинаково, и с коэффициентами $a_1 - a_2, a_2 - a_1$, если ориентации ребер противоположны. Циклы имеют вид $a(e_1 \pm e_2)$.

Example (потоковый многочлен)

Theorem

Значение многочлена $F_G(m)$ при целом $m \geq 2$ равно числу всюду ненулевых циклов над $\mathbb{Z}_m$ в произвольной ориентации ребер графа G, умноженному на $(-1)^{b_1(G)+1}$.

Всюду ненулевой цикл можно понимать как "поток" в графе, а его коэффициенты при ребрах как "величину тока" вдоль направления этого ребра, что и объясняет название инварианта. При этом суммарный поток через любую вершину равен нулю, т.е. вершина не является ни источником, ни стоком.

Для доказательства утверждения заметим, что число всюду ненулевых циклов не зависит от выбора ориентации графа: чтобы превратить цикл в некоторой ориентации в цикл относительно другой ориентации, отличающейся от первой ориентацией некоторых ребер, достаточно поменять коэффициенты при этих ребрах на противоположные. Такая операция задает взаимно-однозначное отображение, как на множествах циклов, так и на множествах всюду ненулевых циклов.

Example (потоковый многочлен)

Проверим, что число всюду ненулевых циклов над $\mathbb{Z}_m$, умноженное на $(-1)^{b_1(G)}$, является V-функцией. Мультипликативность числа всюду ненулевых циклов очевидна. Умножение на $(-1)^{b_1(G)}$ не меняет этого свойства, поскольку при несвязном объединении графов их цикломатические числа складываются.
Фиксируем граф G, ориентацию в нем и ребро $e \in E(G)$. Всякому всюду ненулевому циклу в графе G''_e можно сопоставить цикл в графе G. Действительно, рассмотрим цепь в G, отвечающую выбранному циклу в G''_e, и достроим ее до цикла. Для этого нужно приписать ребру e в G коэффициент, равный, с точностью до знака, значению коэффициента границы рассматриваемой цепи в любой из вершин, инцидентных ребру e. Эти два значения отличаются знаком, и выбранный коэффициент зависит от выбранного направления ребра e. Может случиться, однако, что построенный таким образом коэффициент равен нулю. Такое происходит в том и только в том случае, когда цикл в G''_e задает цикл в G'_e. Тем самым, число всюду ненулевых циклов в G равно разности числа всюду ненулевых циклов в G''_e и G'_e. Цикломатические числа графов G и G''_e совпадают, а цикломатическое число графа G'_e меньше их на единицу. Поэтому после умножения числа всюду ненулевых циклов на $(-1)^{b_1(G)}$ получаем функцию, удовлетворяющую соотношению Татта.

Сложностью $C(G)$ графа G называется количество остовных деревьев в нем.

- Докажите, что сложность графа удовлетворяет сооношению удаления-стягивания, т.е. является W-функцией.
  (Сложность несвязного графа равна 0, поэтому V-функцией сложность не является.)

Сложностью $C(G)$ графа G называется количество остовных деревьев в нем.

- Докажите, что сложность графа удовлетворяет сооношению удаления-стягивания, т.е. является W-функцией.
  (Сложность несвязного графа равна 0, поэтому V-функцией сложность не является.)
- Вычислите сложность графов, принадлежащих к изучавшимся нами ранее типам. Какова сложность связного графа с цикломатическим числом 1, содержащего единственный простой цикл длины n?
- Проверьте, что сложность графа не меняется при удалении из него и добавлении к нему петель.

- Докажите, что число остовных лесов в графе, т.е. число лесов, количество деревьев в которых совпадает с количеством компонент связности графа, является V-функцией.
- Докажите, что значение многочлена Татта графа в точке $(1,1)$ равно числу остовных лесов в нем. В частности, для связного графа это значение равно числу остовных деревьев в нем.

- Докажите, что число остовных лесов в графе, т.е. число лесов, количество деревьев в которых совпадает с количеством компонент связности графа, является V-функцией.
- Докажите, что значение многочлена Татта графа в точке $(1,1)$ равно числу остовных лесов в нем. В частности, для связного графа это значение равно числу остовных деревьев в нем.
- Докажите, что значение многочлена Татта графа в точке $(2,1)$ равно числу лесов в нем.

Семинары 2. Задачи

Семинары 2. Задачи

- Понятие цикла над группой $\mathbb{Z}_m$ можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над $\mathbb{Z}_m$, но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с m элементами.

Семинары 2. Задачи

- Понятие цикла над группой $\mathbb{Z}_m$ можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над $\mathbb{Z}_m$, но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с m элементами.
- Вычислите потоковые многочлены a) деревьев; b) циклов на n вершинах; c) графа K_4; d) триангуляций.

Семинары 2. Задачи

- Понятие цикла над группой $\mathbb{Z}_m$ можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над $\mathbb{Z}_m$, но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с m элементами.
- Вычислите потоковые многочлены a) деревьев; b) циклов на n вершинах; c) графа K_4; d) триангуляций.
- Чему равно значение потокового многочлена на данном графе G при $m = 2$?

- Остовный подграф графа G на $2n$ вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или 1-*фактором*, если он состоит из n ребер, никакие два из которых не имеют общих концов. Например, в квадрате C_4 два совершенных паросочетания, а в полном графе K_4 их три. Рассмотрим V-функцию, значение которой на графе X_n равно
$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}(3^n+1).$$
Докажите, что модуль (абсолютная величина) значения этой V-функции на всяком *кубическом* графе (т.е., на графе, валентности всех вершин которого равны трем) равно числу совершенных паросочетаний в нем.

Проверим это утверждение для кубического графа K_4 — полного графа на четырех вершинах. Значение универсального инварианта U на таком графе равно

$$U_{K_4} = s_0^4 + 6s_0^3 + 15s_0^2 + 4s_0s_1 + 16s_0 + 15s_1 + 6s_2 + s_3.$$

Его несложно вычислить благодаря высокой степени симметрии графа K_4. Например, в множестве его ребер имеется $\binom{6}{3} = 20$ трехреберных подмножеств. Четыре из соответствующих остовных подграфов составляют треугольник C_3, объединенный с отдельной вершиной, остальные 16 состоят из одной компоненты связности с цикломатическим числом 0. Таким образом, вклад трехреберных подграфов в универсальный инвариант равен $4s_0s_1 + 16s_0$. Воспользовавшись выражениями для s_n

$$\begin{array}{rclrcl} s_0 & = & t_0, & s_1 & = & t_1 - t_0, \\ s_2 & = & t_2 - 2t_1 + t_0, & s_3 & = & t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0, \end{array}$$

через значения на базисных графах и известными значениями

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -5, \quad t_3 = 14,$$

получаем

$$s_0 = -1, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = 36.$$

Подстановка этих значений в универсальный инвариант дает 3, что и требовалось.

Семинары 2. Задачи

- Подсчитайте число совершенных паросочетаний в а) цепочках A_n; б) циклах C_n; в) полных графах K_n; г) в триангуляциях (см. предыдущую лекцию).
- Найдите все графы с шестью вершинами, имеющие 6 совершенных паросочетаний.

- Составьте таблицу, в которой для всех связных графов с ≤ 5 вершинами указаны значения всех введенных выше инвариантов графов.