

# ОДУ-2022. Домашнее задание №1

Выдано 12.09.2022

Срок сдачи до **24:00 25.09.2022**

*Аккуратно записанную и оформленную в виде единого pdf-файла работу надо послать на адрес закрепленного за Вашей группой учебного ассистента. Распределение семинарских групп по учебным ассистентам см. вверху на странице курса.*

---

**Задача 1.1.** Ускорение лодки с выключенным мотором отрицательно и пропорционально её скорости. Коэффициент пропорциональности обозначим символом  $-\kappa$ .

- (а) Какое время потребуется до замедления скорости с начальной  $v = 1$  м/с до нулевой? Какое при этом будет пройдено расстояние?
- (б) Пусть замедление со скорости 6,4 м/с до 3,2 м/с заняло 20 с. Какое время потребуется для замедления с 3,2 м/с до 0,1 м/с? Какое расстояние будет при этом пройдено?

**Задача 1.2.** В течение года из каждого грамма радия-226 распадается 0,44 мг. Найдите постоянную распада радия-226 двумя способами:

- (а) *точно*, подбирая константу  $c$ , для которой есть решение уравнения  $\dot{x} = -cx$  с  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 1 - 0,00044$ ;
- (б) *приблизённо*, считая 1 год «достаточно малым временем» и полагая, что распад в течение года происходит примерно по линейному закону  $\Delta x = -\hat{c}x\Delta t$ .
- (в) Оцените, не пользуясь вычислительными устройствами, величину  $(c - \hat{c})/c$ .

**Задача 1.3.** Стенка сосуда получена вращением кривой  $h = x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , вокруг вертикальной оси  $Oh$ . Вначале сосуд заполнен жидкостью до высоты  $H$ , в момент времени  $t = 0$  в дне сосуда открывается отверстие «малой» площади  $\sigma$ .

- (а) Определите закон  $h(t)$  изменения уровня жидкости.
- (а) Найдите время  $T$  полного вытекания жидкости из сосуда.
- (б) Опишите, как в зависимости от  $\alpha$  меняется скорость изменения  $h(t)$  при  $t \rightarrow T$ .

**Задача 1.4.** Эволюция популяции рыб с квотой вылова, линейно зависящей от ее численности, задается уравнением

$$\dot{x} = x - x^2 - bx.$$

Здесь функция  $x(t) \geq 0$  описывает численность популяции, а первое, второе и третье слагаемые в правой части уравнения учитывают, соответственно, размножение, конкуренцию за ресурсы и квоту вылова. Для всех возможных значений коэффициента  $b > 0$

- (а) постройте явно все (как неотрицательные, так и отрицательные) решения этого уравнения,
- (б) нарисуйте фазовые портреты и эскизы интегральных кривых.

**Задача 1.5.** Рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{x} = x^2 + \varepsilon.$$

- (а) Опишите качественно, как устроен его фазовый портрет и семейство интегральных кривых в зависимости от  $\varepsilon$ .
- (б) Пусть  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим решение с начальным условием  $x(0) = -1$ , и пусть  $x(T) = 1$ . Докажите, что при  $\varepsilon \rightarrow +0$   $T = T(\varepsilon)$  имеет степенную асимптотику, то есть для некоторых констант  $c, \alpha \in \mathbb{R}$  (каких?) верно, что  $T(\varepsilon) \sim c\varepsilon^\alpha$ .

**Задача 1.6.** Опишите качественно поведение *всех* решений следующего уравнения, удовлетворяющих начальному условию  $x(0) = 0$ .

- (а)  $\dot{x} = \sqrt{|\sin x|}$ , (б)  $\dot{x} = \sqrt{|\sin x|} \operatorname{sgn}(\sin(x/2))$ .