ОДУ-2022. Семинар №1

(6/9 сентября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Векторным полем называется соответствие, которое каждой точке x некоторой области (открытого множества), называемой *фазовым пространством*, ставится в соответствие приложенный к ней вектор $v(x)$.

Векторное поле задаёт *автономное дифференциальное уравнение*

$$\dot{x} = \varphi(x),$$

решением которого называется отображение φ интервала I на оси времени в фазовое пространство, такое что

$$\dot{\varphi}(t) \equiv v(\varphi(t)) \text{ на } I.$$

Расширенным фазовым пространством называется произведение $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$ оси времени на фазовое пространство. В нём лежат графики решений нашего ДУ, которые называют *интегральными кривыми.*

Рассматривают и дифференциальные уравнения более общего вида, где вектор v зависит не только от точки, но и от момента времени: $v = v(t, x)$. В этом случае область определения $\tilde{\Omega}$ функции v может не быть цилиндром, однако она по-прежнему называется *расширенным фазовым пространством.*

Соответственно, *(неавтономным) дифференциальным уравнением (первого порядка)* называется уравнение

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x),$$

его решение — отображение $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$, для которого

$$\dot{\varphi}(t) \equiv v(t, \varphi(t)) \text{ на } I$$

(в частности, предполагается, что $(t, \varphi(t)) \in \tilde{\Omega}$ при всех $t \in I$).

Теорема. *Для C^1-гладкого векторного поля v через каждую точку расширенного фазового пространства проходит одна и только одна интегральная кривая.*
Для неавтономного случая $v = v(x, t)$ тот же результат верен, если v и $\partial v/\partial x$ непрерывны (существование $\partial v/\partial t$ не требуется).

Более слабые условия существования и единственности решений будут обсуждаться на лекциях.

Радиоактивный распад

При распаде радиоактивных изотопов количество вещества, распадающегося за малое время Δt, пропорционально имеющемуся его количеству и длине промежутка времени Δt:

$$\Delta x \approx -cx(t)\Delta t.$$

Поделив обе части уравнения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем $\dot{x}(t) = -cx(t)$. Здесь *постоянная распада c* зависит от вида радиоактивного изотопа.

Задача 1.1. Решения уравнения $dx/dt = -cx$ — монотонные функции (почему?). Напишите уравнение на обратную функцию $t = t(x)$ и решите его, а затем и исходное уравнение.

Решение. Во-первых, $x \equiv 0$ является решением. По теореме существования и единственности никакое другое решение не может принимать значение 0 в какой-либо момент времени. Значит, для такого решения x либо всё время положителен, либо всё время отрицателен, а тогда dx/dt имеет постоянный знак, то есть решение монотонно.

Далее, $dt/dx = -1/cx$. Интегрируя, получаем $t(x) = -(1/c)\ln|x| + M$. Обращая это равенство, получаем $x(t) = \pm e^{-ct-A}$, или, переобозначая $\pm e^{-M} = A$, $x(t) = Ae^{-ct}$.

Обратите внимание студентов на то, что в процессе решения одно из решений $x \equiv 0$ отделилось от общих формул — так часто бывает, и нужно следить, чтобы не терять такие решения. (В нашем случае оно снова вошло в общую формулу с $A = 0$, но так бывает не всегда.) ◄

Уравнение имеет бесконечно много решений $x(t) = Ae^{-ct}$. Это совершенно неудивительно: оно описывает распад любого количества вещества. Естественно поэтому задать количество изотопа в начальный момент времени: $x(t_0) = x_0$. Совокупность дифференциального уравнения $dx/dt = \varphi(x,t)$ и начального условия $x(t_0) = x_0$ называется *задачей Коши*. Геометрически это поиск интегральной кривой, проходящей через точку (t_0, x_0) расширенного фазового пространства. Вышеприведённая теорема тогда говорит, что решение задачи Коши при указанных условиях существует и единственно.

Задача 1.2. Проверьте непосредственно, что для нашего уравнения $\dot{x} = -cx$ это действительно так, предъявив решение задачи Коши с любым начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Задача 1.3. Как связаны константа распада c и период полураспада $t_{1/2}$?

Трение каната вокруг столба

При недостатке времени разберите только случай круглого столба.

Задача 1.4. Швартовый канат судна три раза обмотан вокруг круглого столба. Коэффициент трения каната о столб составляет $\mu = 1/3$. За свободный конец каната тянут с силой $\hat{T} = 500$ Н, однако этого недостаточно — судно тянет канат настолько сильно, что он проскальзывает. Найдите силу, с которой судно тянет канат.

Решение. Зададим угловую координату на канате и рассмотрим его кусочек между углами φ и $\varphi + \Delta\varphi$. На него действуют две силы натяжения канатов, сила нормальной реакции столба и сила трения. Считая кусочек маленьким (так что сила нормальной реакции N действует пропорционально нормали в середине кусочка, а сила трения F — параллельно), получаем в проекциях на эти две оси такие равенства

$$(T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi))\cos(\Delta\varphi/2) = -F,$$
$$(T(\varphi + \Delta\varphi) + T(\varphi))\sin(\Delta\varphi/2) = N.$$

Так как канат проскальзывает, $F = \mu N$, а тогда, оставляя только слагаемые первого порядка малости по $\Delta\varphi$, получаем

$$(T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi)) = F = -\mu \cdot 2T(\varphi) \cdot (\Delta\varphi/2) + o(\Delta\varphi).$$

или, переходя к пределу $dT/d\varphi = -\mu T$. Соответственно, решение имеет вид $T = T_0 e^{-\mu\varphi}$. Подставляя начальное условие $T(6\pi) = \hat{T}$, находим $T_0 = \hat{T}e^{6\pi\mu} \approx 500 \cdot 535 = 267745$ Н. ◄

Задача 1.5. Тот же вопрос, если столб имеет форму прямого цилиндра, сечение которого — гладкая выпуклая плоская кривая.

Решение. Предыдущее решение дословно переносится на этот случай, если в качестве координаты φ выбрать угол наклона касательной к нашей кривой и положительным направлением оси абсцисс. ◄

Вытекание жидкости из малого отверстия («задача о дырявом ведре»)

Пусть дан сосуд известной формы, то есть известна площадь горизонтального сечения сосуда $S(h)$ как функция высоты h расположения сечения, отсчитываемой от его дна. На дне имеется «малое отверстие». Нужно найти закон $h(t)$ изменения уровня жидкости в сосуде с течением времени t. За какой промежуток времени T сосуд опустеет?

Введем следующие обозначения. Пусть $v(h)$ — скорость струи жидкости, вытекающей из отверстия, при высоте уровня жидкости в сосуде h. Площадь отверстия σ мала по сравнению с $S(h)$. Это допущение обеспечивает «плавное» (безвихревое) вытекание жидкости из сосуда и гарантирует выполнение закона Торричелли:

$$v(h) = \kappa\sqrt{2gh},$$

где константа $\kappa \simeq 1$ зависит от свойств конкретной жидкости. Дальше для простоты будем полагать $\kappa = 1$. Кроме того, будем считать, что $h(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция времени.

Выразим убыль объема жидкости в сосуде ΔV за малый промежуток времени Δt двумя способами.

С одной стороны, $\Delta V = S(h)\Delta h + o(\Delta h)$ — выражение объема жидкости, вытекшей за малое Δt как объема цилиндра с площадью основания $S(h)$ и высотой, равной величине снижения уровня $\Delta h < 0$. С другой стороны, $-\Delta V = \sigma\Delta l + o(\Delta t) = \sigma v(h)\Delta t + o(\Delta t)$ — выражение того же объема через скорость струи и площадь сечения отверстия. Знак минус выбран потому, что $\Delta V < 0$ (количество жидкости *уменьшается*). Кроме того, мы пренебрегаем изменением скорости струи $v(h)$ за малое Δt, то есть, рассматриваем все изменения величин с точностью до первого порядка малости.

Итак, учитывая первые порядки по Δt и Δh, получаем равенство:

$$S(h)\Delta h = -\sigma v(h)\Delta t + o(\Delta t).$$

Если поделить обе стороны этого равенства на Δt, то в пределе $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение[1] на $h(t)$:

$$\begin{cases} S(h)\,\dfrac{dh}{dt} = -\sigma v(h) = -\sigma\sqrt{2gh} \\ h(0) = H, \end{cases} \tag{1}$$

где H — начальный уровень воды в сосуде.

Рассмотрим решение этой задачи для некоторых конкретных случаев.

Пример 1. Сосуд представляет собой прямой цилиндр постоянного сечения: $S(h) = S$.

Дифференциальное уравнение (1) на $h(t)$ запишем следующим образом:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h}} = -A, \quad \text{где} \quad A = \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g} > 0.$$

Обратите внимание, что всю зависимость от h мы перенесли в одну сторону равенства. Проинтегрируем теперь обе части уравнения по t в пределах от $t = 0$ до произвольного момента $t > 0$:

$$\int_0^t \frac{h'(\tau)}{\sqrt{h}}\,d\tau = -At.$$

Из физических соображений ясно, что высота уровня жидкости в сосуде $h(t)$ — *монотонно* убывающая с течением времени величина. Поэтому в определенном интеграле можно произвести замену переменной интегрирования: перейти к интегрированию по функции h. Вводим новую переменную интегрирования $y = h(\tau)$, тогда $dy = h'(\tau)d\tau$ и интеграл вычисляется явно:

$$\int_0^t \frac{h'(\tau)}{\sqrt{h}}\,d\tau = \int_{h(0)}^{h(t)} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)}\right).$$

[1] Можно поделить на Δh, тогда в пределе $\Delta h \to 0$ получится дифференциальное уравнение на $t(h)$.

В итоге, учитывая $h(0) = H$ и подставляя явный вид константы A, получаем ответ:

$$h(t) = H\,\left(1 - \frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{g}{2H}}\,t\right)^2 = H\,\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^2, \quad T_0 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

По смыслу задачи это выражение дает закон изменения уровня жидкости в интервале времени $t \in [0, T_0]$. Величина T_0 равна времени опустошения сосуда. После момента T_0 уровень жидкости остается нулевым: $h(t) = 0$ для $t > T_0$.

Отметим, что выражение $\sqrt{2H/g}$ представляет собой время свободного падения без начальной скорости с высоты H. Время вытекания жидкости из сосуда больше этого значения во столько раз, во сколько площадь сечения сосуда превышает площадь отверстия. Далее мы убедимся, что это весьма общая структура ответа: выбирая сосуды разной формы, мы для времени T_0 полного опустошения сосуда будем получать произведение времени свободного падения с начальной высоты жидкости на отношение характерных площадей с некоторым поправочным числовым коэффициентом, учитывающим форму сосуда.

Пример 2. Цилиндрическая цистерна (цилиндр «на боку»). Обозначив буквами L и R длину цистерны и ее радиус соответственно, из элементарной геометрии найдем площадь горизонтального сечения цистерны на высоте h от нижней ее точки:

$$S(h) = 2L\sqrt{h(2R-h)}.$$

Подставляя это значение в общее дифференциальное уравнение (1), получаем для уровня жидкости в цистерне такую задачу:

$$\sqrt{2R-h}\,\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{L}, \quad h(0) = H \le 2R.$$

Интегрируем обе части этого уравнения по t от начального момента времени до произвольного промежуточного значения t, слева делаем замену переменной интегрирования $y = h$:

$$\int_0^t \sqrt{2R - h(\tau)}\,h'(\tau)\,d\tau = \int_{h(0)}^{h(t)} \sqrt{2R-y}\,dy = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{L}\,t.$$

Вычисляя интеграл по y, получаем ответ для $h(t)$:

$$h(t) = 2R - \left((2R-H)^{3/2} + \frac{3\sigma\sqrt{2g}}{2L}\,t\right)^{2/3}.$$

Для частного случая $H = 2R$ (в начальный момент времени цистерна полностью заполнена) наша формула упрощается:

$$h(t) = H\left(1 - \left(\frac{t}{T_0}\right)^{2/3}\right), \tag{2}$$

где время T_0 полного вытекания жидкости из цистерны дается следующим выражением:

$$T_0 = \frac{1}{3}\,\frac{LH}{\sigma}\,\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Заметим, что этот ответ опять имеет упомянутую выше структуру: числовой коэффициент (в данном случае $1/3$) и произведение отношения характерных площадей и времени свободного падения с высоты H.

Однако у формулы (2) есть особенность, показывающая ограниченность нашей модели вытекания жидкости: скорость понижения уровня жидкости в цистерне $h'(t)$ стремится к бесконечности при $t \to 0+$, что с физической точки зрения абсурдно. Причина этого в том, что любая математическая модель реального явления есть результат некоторых упрощений и пренебрежений «несущественными» деталями. Конечно, учесть все эти детали невозможно, и упрощения необходимы для построения работающей модели. Однако, построив модель явления и получив соответствующее уравнение, надо всегда помнить, что выводы из этой модели (решения уравнения) могут иметь ограниченную применимость в реальном эксперименте.