ОДУ-2022. Семинар №2

(13/16 сентября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

На этом семинаре мы будем изучать автономные дифференциальные уравнения на прямой, то есть уравнения вида

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где функция f непрерывна на некотором (быть может, неограниченном) интервале $I \subset \mathbb{R}$.

Начнём с пары наблюдений. Во-первых, если $f(a) = 0$ (такие a называются *особыми точками* уравнения или векторного поля), то $x \equiv a$ — решение 1. Во-вторых, если $x = \varphi(t)$ — решение, то $x = \varphi(t + c)$ — тоже решение (это общее свойство автономных уравнений).

Пусть $x = x(t)$ — решение (1) и пусть $f(x(t_0)) \neq 0$. Рассмотрим максимальный интервал $D \ni x_0 = x(t_0)$, где f не обращается в нуль. Максимальность означает, что его нельзя расширить. Это значит, что если $D = (a, b)$, то либо $b = +\infty$, либо b — конец интервала I, либо $f(b) = 0$. Пусть для определённости $f|_D > 0$.

Тогда $x^{-1}(D)$ — открытое множество, и пусть J — его связная компонента, содержащая t_0. Тогда на J верно, что $dx(t)/dt = f(x(t))) > 0$, то есть x возрастает на J. Рассмотрим поэтому обратную функцию $t = t(x)$. Тогда $dt/dx = 1/f(x)$, а тогда, интегрируя обе части, имеем

$$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}.$$

Если обозначить за $F(x)$ первообразную функции $1/f(x)$ на интервале D, то это равенство переписывается как

$$t(x) - t_0 = F(x) - F(x_0).$$

Функция F монотонно возрастает, и $x(t)$ теперь однозначно определяется из равенства

$$F(x(t)) = F(x_0) + t - t_0. \tag{2}$$

Рассуждая совершенно аналогично (с заменой монотонно возрастающих функций на монотонно убывающие), получим, что та же формула (2) справедлива и на интервале, где $f < 0$.

Задача 2.1. Найдите решения уравнений и постройте эскизы интегральных кривых:
(а) $\dot{x} = x$, (б) $\dot{x} = x^2$, (в) $\dot{x} = x^2 + 1$.

Решение. (а) Есть решение $x \equiv 0$, а также решения уравнения $\ln|x(t)| = \ln|x_0| + t - t_0$. Таким образом, пока решение $x(t)$ положительно, оно задаётся равенством $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$. Но правая часть остаётся положительной при всех $t \in \mathbb{R}$, поэтому всё решение задаётся этой формулой. Те же рассуждения работают и для $x_0 < 0$.
(б) Те же рассуждения дают $x(t) = \frac{1}{C-t}$ (где $C = t_0 + (1/x_0)$). Но надо иметь в виду, что правая часть не определена при $t = C$. Поэтому для каждого C эта формула даёт два отдельных решения: на $(-\infty, C)$ и $(C, +\infty)$. Рассуждение, показывающее, что любое решение (кроме $x \equiv 0$) здесь задаётся этой формулой, такое: правая часть остаётся положительной на $(-\infty, C)$, однако в точку C и далее решение продолжиться не может, поскольку $\lim_{t \to C-0} x(t) = +\infty$.
Обязательно обратите внимание студентов, что несмотря на то, что правая часть — не просто C^1, а даже аналитическая функция на всей прямой, решение существует только на полупрямой. «Убегание на бесконечность» решений при приближении к концу интервала определения — общий факт, известный как «теорема о продолжении решений до границы компакта»; точная её формулировка будет на лекции.
(в) Здесь всё то же самое, только проще — решения имеют вид $x(t) = \operatorname{tg}(t - C)$, где $t \in (C - \pi/2, C + \pi/2)$.
Эскизы интегральных кривых приведены на рис. 1. ◄

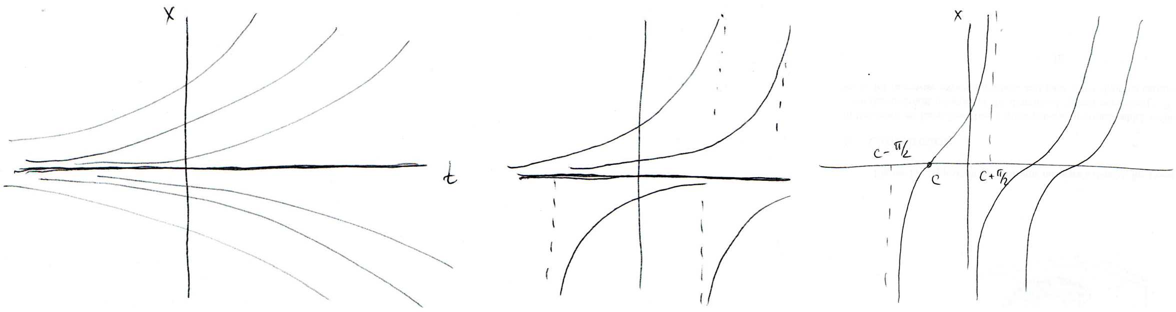

Рис. 1: Интегральные кривые в задаче 2.1а–в

Могут ли существовать решения, которые на части интервала определения задаются формулой (2), а на части — формулой $x \equiv c$, или же решения, которые на разных частях интервала задаются формулой (2) для разных интервалов знакопостоянства правой части?

Мы ограничимся случаем, когда f имеет лишь изолированные нули. Продолжим сначала вышеприведённый анализ решения на интервале знакопостоянства ($D = (a, b)$ и J — такие же, как выше; $f|_D > 0$).

Решение $x(t)$ возрастает с ростом $t \in J$. Как оно ведёт себя при приближении к t^* — правому концу J? Теоретически возможны такие варианты (см. рис. 2): (a) t^* конечно, $x(t^* - 0)$ лежит внутри J, (b) t^* конечно, $x(t^* - 0) = b$, (c) $t^* = +\infty$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = b$, (d) $t^* = +\infty$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \hat{x} < b$.

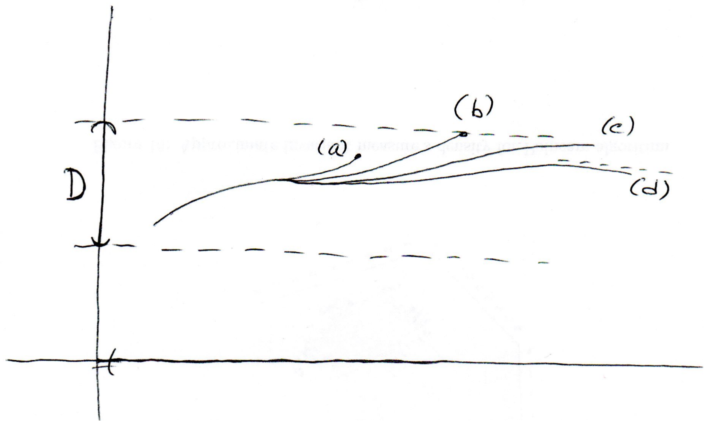

Рис. 2: Возможное поведение решения на отрезке знакопостоянства f

Случай (a) отвечает искусственному уменьшению области определения решения (мы всегда можем ограничить решение на меньший интервал). Формула (2) позволяет продолжить решение и дальше. Мы дальше обычно под решениями будем понимать непродолжимые решения — те, которые нельзя продолжить на больший интервал (или, эквивалентно, которые не получаются «укорачиванием» области определения другого решения).

Случай (d) невозможен: переходя к пределу при $t \to +\infty$ в формуле (2), мы получим $F(\hat{x}-0) = +\infty$, но F — непрерывная функция на $D \ni \hat{x}$.

В случаях (b) и (c) аналогичный переход к пределу при $t \to t^* - 0$ даст нам, что

$$F(b - 0) = F(x_0) + t^* - t_0.$$

Иными словами, в случае (b) несобственный интеграл

$$F(b - 0) - F(x_0) = \int_{x_0}^{b-0} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

сходится, а в случае (c) — расходится.

В случае (c) решение вправо за t^* продолжать уже некуда — $t = +\infty$. В случае (b) если такое решение существует, то мы по непрерывности получаем, что $x(t^*) = b$. Иными словами, в подслучаях (b.1) $b = +\infty$ или (b.2) b — граница интервала I, где определена правая часть f, продолжать решение тоже некуда.

Случай (b.1) имеет место, как мы видели, для $\dot{x} = x^2 + 1$, а случай (b.2) — для уравнения $\dot{x} = 1/\sqrt{1-x^2}$. Для него решения имеют вид $x(t) = \sin(t-c)$, где $t \in (c-\pi/2, c+\pi/2)$. Соответственно, $t^* = c + \pi/2$ и $x(t^* - 0) = 1$, однако 1 не входит в область определения правой части.

Остаётся единственный подслучай (b.3) $b \in I$, $f(b) = 0$. Тогда $x(t^*) = b$, и на каком-то отрезке (быть может, из одной точки, а быть может, и на целом луче) справа от t^* мы имеет $x(t) \equiv b$. Что может произойти дальше, за правым концом t^{**} этого отрезка?

Во-первых, в достаточно малой полуокрестности t^{**} не может существовать точек с $x(t) < b$: по непрерывности в таких точках $x(t)$ достаточно близко к b, а это значит, что на интервале $(t - L, t)$, где $L = F(b-0) - F(a+0) - \delta$ с малым δ решение управляется формулой (2) и потому «живёт» на (a, b). Поскольку δ мало, $t^{**} \in (t - L, t)$, и мы приходим к противоречию $b = x(t^{**}) \in (a, b)$ (зелёные линии на рис. 3) . Аналогичным образом, если на смежном интервале $D' = (b, c)$ знакопостоянства правой части $f|_{D'} < 0$, решение не может выйти и в D' (зелёные линии на рис. 3). Остаётся только случай $f|_{D'} > 0$ — тогда, если $\int_b^{b+\delta} d\xi/f(\xi)$ сходится, возможно продолжение решения по формуле (2) для интервала D'.

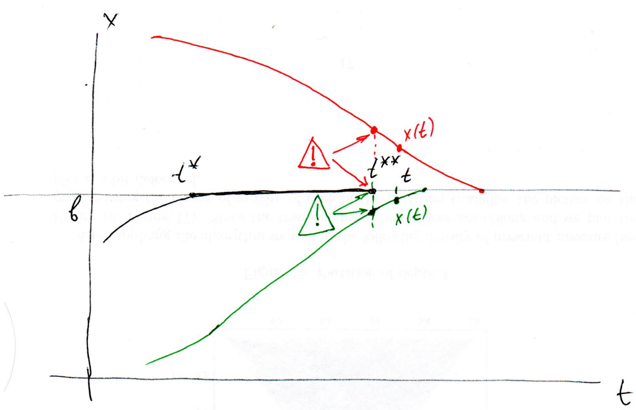

Рис. 3: Невозможные продолжения решения из особой точки

Разберём несколько примеров.

Задача 2.2. Решите уравнения:
(а) $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$, (б) $\dot{x} = (3/2)\sqrt[3]{x}$.
Нарисуйте, как себя ведут их интегральные кривые.

Решение. (а) $\int d\xi/3\sqrt[3]{\xi^2} = \sqrt[3]{\xi}$, поэтому пока $x(t) \in (0, +\infty)$, верно $\sqrt[3]{\xi} = t - C_1$, то есть $x(t) = (t - C_1)^3$ — а значит, это наблюдается на луче (C_1, ∞). Точно так же пока $x(t) \in (-\infty, 0)$, оно удовлетворяет $x(t) = (t - C_2)^3$, и это происходит на $(-\infty, C_2)$. Таким образом, решение состыковывается из кусков трёх видов: $x \equiv 0$ на каких-то промежутках; $x(t) = (t-a)^3$ на луче $(a, +\infty)$ или на луче $(-\infty, a)$. Получаем такие варианты: (i) $x \equiv 0$ при $t \in \mathbb{R}$, (ii) $x = (t-a)^3$ при $t < a$, $x = 0$ при $t \geq a$, (iii) $x = 0$ при $t < a$, $x = (t-a)^3$ при $t \geq a$, (iv) $x = (t-a)^3$ при $t < a$, $x = 0$ при $t \in [a, b]$, $x = (t-a)^3$ при $t > b$. В последнем случае $a \leq b$ — обратите внимание, что случай $a = b$ возможен.
(б) Здесь $F(\xi) = \sqrt[3]{\xi^2}$, решение определено на луче $(c, +\infty)$ и равно $x(t) = \pm(t-c)^{3/2}$. Поэтому здесь возможно лишь тождественно нулевое решение и решение вида $x(t) = 0$ при $t < c$, $x(t) = \pm(t-c)^{3/2}$ при $t \geq c$.

Графики некоторых интегральных кривых приведены на рис. 4 (цветом показано, как интегральные кривые могут собираться из «кусков»). ◀

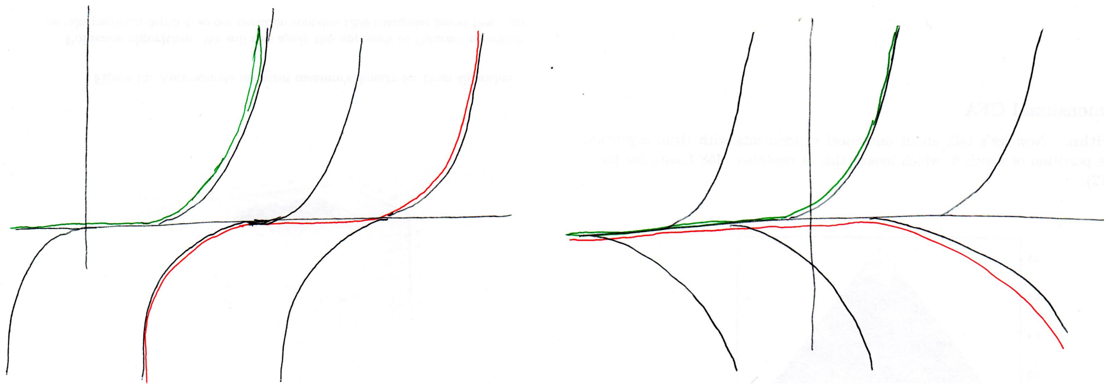

Рис. 4: Интегральные кривые в задаче 2.2а–б

Задача 2.3. Объясните, почему если правая часть $f(x)$ — дифференцируемая функция, то вышеописанных сложностей не возникает: интегралы $\int d\xi/f(\xi)$ расходятся.

Решение. Вблизи точки b, где $f(b) = 0$, верно, что $f(b+h) = 0 + f'(b)h + o(h)$, то есть справедлива оценка $|f(b+h)| \leq c|h|$. Тогда $|1/f(b+h)| \geq 1/c|h|$, а интеграл от $1/|h|$ расходится. ◄

Устойчивость

Мы уже рассматривали поведение решений вблизи особой точки. Это поведение крайне важно при исследовании любого дифференциального уравнения, происходящего из какой-либо практической задачи. Скажем, мы включили прибор, и после некоторого «прогрева» он пришёл в некоторое стабильное состояние — это и есть особая точка нашего векторного поля.[1]

Для простоты мы далее будем рассматривать только случай $f \in C^1$, так что у нас есть теорема существования и единственности решений (или предыдущая задача). И опять-таки ограничимся случаем изолированных нулей.

- Если слева от a функция f положительна, а справа от a она отрицательна, то решения с начальными условиями, близкими к a, стремятся к a при $t \to +\infty$. Такие положения равновесия называют *устойчивыми* (*аттракторами*).

- Если слева от a функция f отрицательна, а справа от a она положительна, то такие решения приближаются к a, когда $t \to -\infty$, а при увеличении t они удаляются от t. Такие положения равновесия называют *неустойчивыми*.[2]

- Если с обеих сторон от a функция f одного знака, то в зависимости от того, в какую полуокрестность попало начальное условие, будет наблюдаться одно или другое поведение: с одной стороны траектории приближаются к a при $t \to +\infty$, а с другой — при $t \to -\infty$. Такие точки называют *полуустойчивыми*.

Для анализа устойчивости особых точек удобно изобразить на прямой нули функции f (они же особые точки), а на интервалах поставить стрелочки, показывающие, в какую сторону движутся точки между ними (вправо, если $f > 0$, и влево, если $f < 0$). Тогда если стрелочки с обеих сторон направлены к особой точке, она устойчива, если с обеих сторон от неё — неустойчива, а если одна направлена к ней, а другая от неё, то полуустойчива. Такая картинка называется *фазовым портретом* системы: линии на ней (отдельно точки = нули f и интервалы между ними) являются проекциями интегральных кривых (эти проекции называются *фазовыми кривыми* или *траекториями*), а стрелочки указывают направление роста t на них.

[1]Разумеется, прибор может и не выйти в стабильное состояние — в нём могут происходить периодические колебания или ещё более сложные процессы. Стабильные состояния — лишь первый шаг в описании поведения системы.

[2]Часто, особенно в более общей ситуации, неустойчивыми именуют все особые точки, которые не являются устойчивыми. Для этого же класса точек используются названия *устойчивые в обратном времени* или *репеллеры*.

Продолжая аналогию с прибором, мы видим, что он не может оказаться в состоянии неустойчивой особой точке: ведь стоит нам чуть-чуть не попасть начальным условием в эту точку, как решение уйдёт от неё. Для полуустойчивого положения равновесия, на первый взгляд, такой проблемы не возникает: если мы попали начальным условием в «устойчивую» полуокрестность, состояние прибора будет стремится к этой особой точке. Однако здесь есть другая проблема.

Задача 2.4. Пусть x — численность какой-либо популяции (скажем, рыб в озере). Объясните, как будет вести себя численность популяции с изменением времени в следующих случаях:
(а) $\dot{x} = x$ (свободное размножение: рост популяции пропорционален её численности),
(б) $\dot{x} = x - x^2$ (размножение с конкуренцией за ресурсы — логистическая модель),
(в) $\dot{x} = x - x^2 - a$ (фиксированная квота вылова — исследуйте зависимость от $a > 0$).

Решение. Заметим, что для качественного анализа не нужно решать уравнение с помощью формулы (2). Фазовые портреты и графики интегральных кривых приведены на рис. 5: сверху вниз — (б) (оно же (в) при $a = 0$), (в) в случаях $0 < a < 1/4$, $a = 1/4$, $a > 1/4$. ◀

Обратите внимание, как меняется устойчивость положений равновесия в последней задаче: при $a < 1/4$ есть два положения равновесия, устойчивое и неустойчивое, которые при $a = 1/4$ сливаются в одно полуустойчивое, которое затем исчезает. Таким образом, хотя квота, соответствующая $a = 1/4$, и даёт наибольшие уловы, рискованна: если немного ошибиться и превзойти $a = 1/4$, популяция будет истреблена.

Таким образом, если слегка «пошевелить» правую часть уравнения (например, параметр a), то полуустойчивое положение равновесия станет чем-то другим: либо распадётся на два положения равновесия, устойчивое и неустойчивое, либо вовсе исчезнет. Поэтому обычно нет причин надеяться, что динамика реального «прибора» имеет такие полуустойчивые особые точки — ведь уравнение лишь приближённо описывает происходящие процессы.

Можно доказать, что при $a \neq 1/4$ «малое шевеление» параметра (и даже «шевеление» всей правой части как гладкой функции!) не меняет «качественное поведение системы»: либо те же два положения равновесия, устойчивое и неустойчивое, лишь слегка сдвинувшиеся, либо ни одного положения равновесия, а популяция просто уменьшается в размере. Такие системы называют *структурно устойчивыми* — с этого понятия и началась современная теория динамических систем.

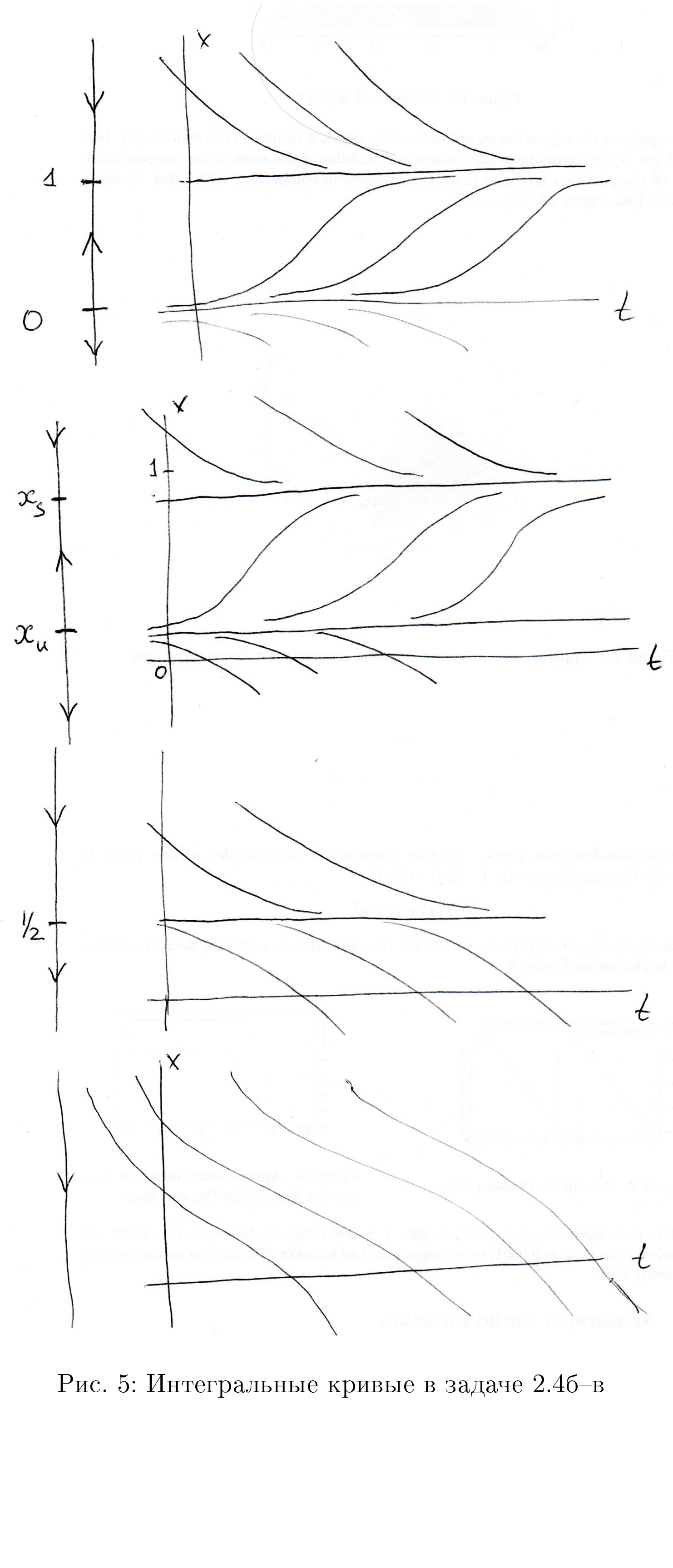

Рис. 5: Интегральные кривые в задаче 2.4б–в