ОДУ-2022. Семинар №3

(20/23 сентября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Пусть правая часть дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y)$$

имеет специальный вид: $f(x, y) = g(x)\phi(y)$, где функции $g(x) \in C^0[a, b]$ и $\phi(y) \in C^0[c, d]$ — непрерывны на указанных отрезка. При этом функция $f(x, y)$ непрерывна как функция двух переменных в области $G = [a, b] \times [c, d]$. Такое уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Ход решения уравнения с разделяющимися переменными удобно разбить на 2 шага.

<u>1 шаг.</u> Прежде всего, нужно выяснить, есть ли у функции $\phi(y)$ корни на отрезке $[c, d]$, то есть, существует ли точка $y_1 \in [c, d]$ такая, что $\phi(y_1) = 0$? Таких точек может быть несколько. Если корни есть, то $y(x) = y_1 = const$ — решение дифференциального уравнения (интегральная кривая).

Дальше нужно рассматривать области, где $\phi(y) \neq 0$, например, $c \leq y < y_1$ и $y_1 < y \leq d$, если корень единственный.

<u>2 шаг.</u> В горизонтальной полосе между корнями функции $\phi(y)$ (то есть, в области, где $\phi(y) \neq 0$) наше дифференциальное уравнение равносильно следующему:

$$\frac{1}{\phi(y)} \frac{dy}{dx} = g(x). \tag{1}$$

Пусть $G(x)$ — одна из первообразных непрерывной функции $g(x)$:

$$\int g(x)dx = G(x) + C.$$

Тогда $g(x) = dG(x)/dx$.

Пусть также $\Phi(y)$ — одна из первообразных непрерывной функции $1/\phi(y)$:

$$\int \frac{dy}{\phi(y)} = \Phi(y) + C.$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d}{dx}\Phi(y(x)) = \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\phi(y)}\frac{dy}{dx}.$$

Итак, исходное уравнение (1) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dx}\Phi(y(x)) = \frac{d}{dx}G(x),$$

из которого сразу следует выражение для (неявного) решения уравнения (1):

$$\Phi(y) - G(x) = C.$$

Это равенство задает однопараметрическое семейство кривых на плоскости $\mathbb{R}^2$. Конкретная интегральная кривая семейства выделяется начальным условием $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in [a, b]$, а y_0 принадлежит одному из интервалов, где $\phi(y) \neq 0$. Начальные данные фиксируют произвольную константу C:

$$C(x_0, y_0) = \Phi(y_0) - G(x_0).$$

Заметим, что все эти рассуждения можно упростить. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{\phi(y)}\,dy = g(x)dx.$$

Объекты, стоящие в правой и левой частях равенства называются дифференциальными формами и представляют собой линейные функции на касательных векторах в каждой точке пространства $\mathbb{R}^2$ (скажем, форма dy отображает вектор в его y-овую координату). Наше уравнение (1) интерпретируется как равенство указанных дифференциальных форм на векторах, касательных к искомой интегральной кривой.

Проинтегрируем эти формы вдоль интегральной кривой:

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\phi(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(y)-\Phi(y_0) = G(x)-G(x_0).$$

Таким образом, приходим к прежнему ответу:

$$\Phi(y)-G(x) = \Phi(y_0)-G(x_0) = C(x_0,y_0).$$

Здесь интеграл от дифференциальной формы вдоль кривой превращается в обычный интеграл, если кривую параметризовать: $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\phi(y)} - \int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{t_0}^{t}\frac{\dot{y}(t)}{\phi(y(t))} - g(x(t))\dot{x}(t)\,dt.$$

Формула замены переменной в интеграле при этом показывает, что от параметризации правая часть не зависит.

Рассмотрим следующие конкретные примеры.

Задача 3.1. $y' - xy^2 = 2xy$.

Решение. Преобразовав уравнение к виду

$$y' = xy(y+2),$$

мы получаем уравнение с разделяющимися переменными с $g(x) = x$, $\phi(y) = y(y+2)$. Правая часть уравнения $xy(y+2)$ непрерывна по совокупности аргументов во всех плоскости $\mathbb{R}^2$, частная производная по переменной y существует и непрерывна тоже во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Это означает, что через любую точку $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая (теорема о существовании и единственности решения).

1 шаг. Уравнение $\phi(y) = 0$ имеет два решения $y_1 = 0$ и $y_2 = -2$. Это дает две интегральные кривые: горизонтальные прямые $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = -2$. Таким образом, дальше мы будем рассматривать решение исходного дифференциального уравнения в трех областях $y < -2$, $-2 < y < 0$ и $y > 0$. В каждой из этих областей переменные разделяются:

$$\frac{dy}{y(y+2)} = x\,dx.$$

Правая часть интегрируется тривиально, а для вычисления интеграла от левой части ее нужно разложить в сумму простых дробей. В итоге получаем такое выражение:

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + \ln|C| = x^2.$$

Отсюда получается ответ в виде однопараметрического семейства функций:

$$y(x) = \frac{2}{C\exp(-x^2)-1}, \quad C \neq 0.$$

К этому семейству нужно не забыть добавить найденные на первом шагу интегральные кривые $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = -2$. Заметим, что решение $y_2(x)$ можно включить в семейство, если расширить допустимые значения константы C на всю вещественную ось. А вот решение $y_1(x)$ не содержится в семействе ни при каком конечном значении константы C. Итак, ответ в этом прмере выглядит так

$$y(x) = \frac{2}{C\exp(-x^2) - 1},\ C \in \mathbb{R}\ \cup\ y(x) = 0.$$

◀

Задача 3.2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'(x+1) + xy = 0. \tag{2}$$

Решение. Здесь мы впервые сталкиваемся с примером так называемых *особых точек* дифференциального уравнения. Действительно, в точке $x = -1$ должно происходить что-то необычное: если допустить, что $y'(-1)$ существует, то наше уравнение превращается в этой точке в алгебраическое равенство $y(-1) = 0$ и этому условию должны будут удовлетворять *все* решения уравнения (2), независимо от начальных данных Коши $y(x_0) = y_0$, которые мы всегда можем наложить.

Чтобы разобраться с этой проблемой, рассмотрим пока области, где $x \neq -1$, и разрешим уравнение относительно производной y':

$$y' = -\frac{xy}{x+1}.$$

Правая часть этого уравнения непрерывна по совокупности аргументов в областях $x > -1$ и $x < -1$ вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. Кроме того, в этих же областях существует и непрерывна частная производная правой части по переменной y. Поэтому в полуплоскостях $x > -1$ и $x < -1$ справедлива теорема существования и единственности и через любую их точку проходит единственная интегральная кривая нашего уравнения.

Чтобы выяснить, что происходит на вертикальной прямой $x = -1$, перейдем в другую карту, то есть, будем считать наше уравнение уравнением на функцию $x(y)$. Перепишем его в виде уравнения на производную dx/dy:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+1}{xy}.$$

Правая часть терпит разрыв на осях системы координат $x = 0$ и $y = 0$, а вот лучи $\{x = -1, y > 0\}$ и $\{x = -1, y < 0\}$ являются интегральными кривыми.

И, наконец, точка $(-1, 0)$ — особая точка нашего уравнения: правая часть не задает в этой точке никакого направления, уравнение в этой точке не определено ни в одной карте.

<u>1 шаг.</u> Рассматриваем уравнение $y' = -\frac{xy}{x+1}$ в области $x > -1$. В этой области есть корень по координате y, который задает интегральную кривую в виде луча $\{y(x) = 0, x > -1\}$.

<u>2 шаг.</u> В областях $x > -1$ и $y > 0$ или $y < 0$ разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1} = -\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx.$$

Это уравнение элементарно интегрируется:

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x + \ln|x+1|, \quad C \neq 0$$

и решение можно выразить в виде явной функции $y(x)$:

$$y(x) = C\,(1+x)\,e^{-x}.$$

Решение $y(x) = 0$ включается в семейство, если расширить множество значений константы C, допустив $C = 0$.

В области $x < -1$ семейство решений параметризуется *независимой* константой $\tilde{C}$: $y = \tilde{C}\,(1+x)\,e^{-x}$.

Кроме того, есть еще 2 интегральные кривые — вертикальные лучи

$$\{x = -1, y > 0\} \text{ и } \{x = -1, y < 0\}.$$

Отметим, что в данном примере можно непрерывно продолжить интегральные кривые из областей $x > -1$ и $x < -1$ в особую точку и получить решение, определенное на всей вещественной оси:

$$y(x) = \begin{cases} C\,(1+x)\,e^{-x}, & x > -1 \\ 0 & x = -1 \\ \tilde{C}\,(1+x)\,e^{-x}, & x < -1. \end{cases}$$

При $C \neq \tilde{C}$ эта функция непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = -1$. Ясно также, что это решение невозможно зафиксировать начальными данными задачи Коши $y(x_0) = y_0$, поскольку из-за наличия особой точки у нас имеется *двухпараметрическое* семейство кривых, компоненты которых дают решение нашего уравнения в одной из областей $x > -1$ или $x < -1$. Начальные данные типа Коши фиксируют только компоненты интегральных кривых, параметризованных C при $x_0 > -1$ или $\tilde{C}$ при $x_0 < -1$.

В данном примере можно получить даже решение, непрерывно дифференцируемое на всей вещественной оси, если взять $C = \tilde{C}$. Но это решение все равно выделяется *вторым дополнительным* требованием дифференцируемости в точке $x = -1$: само наше исходное уравнение (2) не накладывает никаких ограничений на значение производной y' в точке $x = -1$. ◀

Непрерывное продолжение интегральных кривых в особую точку не всегда возможно, что иллюстрируется следующим примером.

Задача 3.3. $xy' + y = 0$.

Решение. Здесь опять нужно разрешить уравнение отностельно производной и при этом тоже возникнет особая точка. Запишем две формы этого уравнения в различных координатных картах плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$y' = -\frac{y}{x}, \qquad x' = -\frac{x}{y}.$$

Видно, что начало координат $(0,0)$ — особая точка. Разделяем переменные:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad xy = C = \text{const}.$$

В дополнение к полученному однопараметрическому семейству гипербол следует добавить еще 4 интегральные кривые: лучи осей координат, на которые их разбивает особая точка $(0,0)$. ◀

Если останется время. Расскажите про связь уравнений с разделяющимися переменными и автономных уравнений. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 1/g(x), \quad \dot{y} = \phi(y). \tag{3}$$

Тогда там, где $\dot{x} \neq 0$, параметрически заданная кривая $(x(t), y(t))$ задаёт кривую $y = y(x)$. При этом

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = g(x)\phi(y).$$

Решения уравнений (3) находятся как $G(x(t)) = t - a$, $\Phi(y(t)) = t - b$, что после исключения t даёт ту же формулу $G(x) - \Phi(y) = C$. Например, в последнем примере имеем $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, решения имеют вид $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{-t}$, $x = C/y$. Особым решениям при этом соответствуют решения системы (3), где одна из координат постоянна (и равна какому-то нулю соответствующей правой части).