Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Предметом *топологической теории графов* являются графы, вложенные в двумерные поверхности. Мы ограничимся, в основном, ориентируемыми поверхностями.

Лекция 3. Графы на поверхностях

Предметом *топологической теории графов* являются графы, вложенные в двумерные поверхности. Мы ограничимся, в основном, ориентируемыми поверхностями.

Граф, вложенный в ориентируемую двумерную поверхность, можно представлять себе следующим образом. Рассмотрим набор правильных многоугольников со сторонами длины 1. Каждый из этих многоугольников ориентирован — при изображении на рисунках мы всегда будем считать, что это ориентация против часовой стрелки.

Предметом *топологической теории графов* являются графы, вложенные в двумерные поверхности. Мы ограничимся, в основном, ориентируемыми поверхностями.

Граф, вложенный в ориентируемую двумерную поверхность, можно представлять себе следующим образом. Рассмотрим набор правильных многоугольников со сторонами длины 1. Каждый из этих многоугольников ориентирован — при изображении на рисунках мы всегда будем считать, что это ориентация против часовой стрелки.

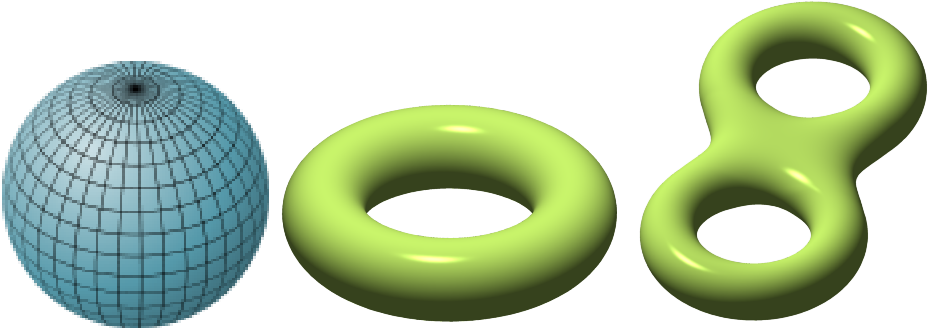
Склеив стороны многоугольников попарно с учетом ориентации, получим ориентируемую поверхность; вершины многоугольников склеиваются в вершины графа на поверхности, их стороны — в ребра графа на поверхности. Чтобы такая склейка была возможна, общее число сторон многоугольников должно быть четным.

Предметом *топологической теории графов* являются графы, вложенные в двумерные поверхности. Мы ограничимся, в основном, ориентируемыми поверхностями.

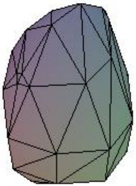
Граф, вложенный в ориентируемую двумерную поверхность, можно представлять себе следующим образом. Рассмотрим набор правильных многоугольников со сторонами длины 1. Каждый из этих многоугольников ориентирован — при изображении на рисунках мы всегда будем считать, что это ориентация против часовой стрелки.

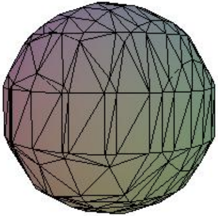
Склеив стороны многоугольников попарно с учетом ориентации, получим ориентируемую поверхность; вершины многоугольников склеиваются в вершины графа на поверхности, их стороны — в ребра графа на поверхности. Чтобы такая склейка была возможна, общее число сторон многоугольников должно быть четным.

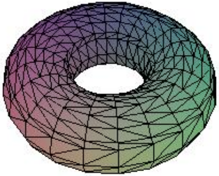
Среди n-угольников могут встречаться 2-угольники и 1-угольники.

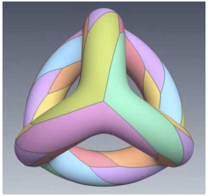


Каждая двумерная ориентированная поверхность гомеоморфна сфере с некоторым числом g ручек и полностью характеризуется этим числом (*родом поверхности*). Для поверхностей на рисунке имеем, соответственно, $g = 0, 1, 2$.



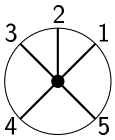






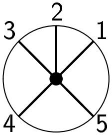
Различные вложенные графы

Ориентация поверхности, на которой лежит граф, задает циклический порядок ребер в каждой его вершине:



Точнее, речь идет не о циклическом порядке ребер, а о циклическом порядке *полуребер*; так, если ребро является петлей, то оба его конца участвуют в этом циклическом упорядочении. Полуребра также называются *флагами*. Полуребер в графе вдвое больше, чем ребер — каждому ребру соответствуют два полуребра.

Ориентация поверхности, на которой лежит граф, задает циклический порядок ребер в каждой его вершине:



Точнее, речь идет не о циклическом порядке ребер, а о циклическом порядке *полуребер*; так, если ребро является петлей, то оба его конца участвуют в этом циклическом упорядочении. Полуребра также называются *флагами*. Полуребер в графе вдвое больше, чем ребер — каждому ребру соответствуют два полуребра.

Theorem

Пусть G — граф, и пусть в каждой его вершине задан циклический порядок инцидентных ей полуребер. Тогда существует единственное вложение графа G в ориентируемую поверхность, задающее этот циклический порядок.

Theorem

Пусть G — граф, и пусть в каждой его вершине задан циклический порядок инцидентных ей полуребер. Тогда существует единственное вложение графа G в ориентируемую поверхность, задающее этот циклический порядок.

Theorem

Пусть G — граф, и пусть в каждой его вершине задан циклический порядок инцидентных ей полуребер. Тогда существует единственное вложение графа G в ориентируемую поверхность, задающее этот циклический порядок.

Для доказательства теоремы построим искомое вложение, т.е. искомую склейку многоугольников. Возьмем произвольное полуребро e_1 графа G. Пусть e_2 — второе полуребро того же ребра e. Полуребро e_2 инцидентно некоторой вершине графа G; рассмотрим полуребро f_1, следующее за полуребром e_2 относительно циклического порядка в этой вершине. Продолжив этот процесс, мы получим последовательность полуребер $(e_1, f_1, \dots)$.

Theorem

Пусть G — граф, и пусть в каждой его вершине задан циклический порядок инцидентных ей полуребер. Тогда существует единственное вложение графа G в ориентируемую поверхность, задающее этот циклический порядок.

Для доказательства теоремы построим искомое вложение, т.е. искомую склейку многоугольников. Возьмем произвольное полуребро e_1 графа G. Пусть e_2 — второе полуребро того же ребра e. Полуребро e_2 инцидентно некоторой вершине графа G; рассмотрим полуребро f_1, следующее за полуребром e_2 относительно циклического порядка в этой вершине. Продолжив этот процесс, мы получим последовательность полуребер $(e_1, f_1, \dots)$.

На каком-то шаге последовательность начнет повторяться. При этом первым повторяющимся полуребром будет e_1. Действительно, полуребро, предваряющее любое данное полуребро, определяется однозначно. Поэтому никакое полуребро в последовательности, отличное от e_1, не может стать первым повторяющимся. Последовательность максимальной длины без повторений образует цикл из ребер графа.

Theorem

Пусть G — граф, и пусть в каждой его вершине задан циклический порядок инцидентных ей полуребер. Тогда существует единственное вложение графа G в ориентируемую поверхность, задающее этот циклический порядок.

Theorem

Пусть G — граф, и пусть в каждой его вершине задан циклический порядок инцидентных ей полуребер. Тогда существует единственное вложение графа G в ориентируемую поверхность, задающее этот циклический порядок.

Если в уже построенных циклах какое-либо из полуребер не встретилось, то возьмем любое из таких полуребер и построим цикл из него, продолжив построение циклов пока не исчерпаются все полуребра. Каждый из построенных циклов определяет многоугольник, а ребра графа G указывают, по каким сторонам мы должны склеивать многоугольники между собой. □

Предположим, что вложенный граф задан склейкой многоугольников или выбором циклического порядка полуребер в каждой из его вершин. Как определить, в поверхность какого рода вложен этот граф?

Лекция 3. Графы на поверхностях: формула Эйлера

Предположим, что вложенный граф задан склейкой многоугольников или выбором циклического порядка полуребер в каждой из его вершин. Как определить, в поверхность какого рода вложен этот граф?

Ответ на этот вопрос дается формулой Эйлера. Для ее применения необходимо сначала представить граф в виде несвязного объединения его компонент связности. Связный вложенный граф разрезает — также связную — поверхность, на которой он лежит, на многоугольники — диски. Обозначим через V количество вершин в графе, через E количество его ребер, через F количество многоугольников, на которые он разрезает поверхность.

Предположим, что вложенный граф задан склейкой многоугольников или выбором циклического порядка полуребер в каждой из его вершин. Как определить, в поверхность какого рода вложен этот граф?

Ответ на этот вопрос дается формулой Эйлера. Для ее применения необходимо сначала представить граф в виде несвязного объединения его компонент связности. Связный вложенный граф разрезает — также связную — поверхность, на которой он лежит, на многоугольники — диски. Обозначим через V количество вершин в графе, через E количество его ребер, через F количество многоугольников, на которые он разрезает поверхность.

Theorem (формула Эйлера)

Для связного вложенного графа справедлива формула

$$2 - 2g = V - E + F,$$

где g — количество ручек поверхности, в которую он вложен.

Theorem (формула Эйлера)

Для связного вложенного графа справедлива формула

$$2 - 2g = V - E + F,$$

где g — количество ручек поверхности, в которую он вложен.

Лекция 3. Графы на поверхностях: формула Эйлера

Theorem (формула Эйлера)

Для связного вложенного графа справедлива формула

$$2 - 2g = V - E + F,$$

где g — количество ручек поверхности, в которую он вложен.

Величина $2 - 2g$ в левой части равенства называется *эйлеровой характеристикой* поверхности. В отличие от рода ее имеет смысл рассматривать и для несвязных поверхностей: эйлерова характеристика несвязной поверхности равна сумме эйлеровых характеристик ее компонент связности.

Theorem (формула Эйлера)

Для связного вложенного графа справедлива формула

$$2 - 2g = V - E + F,$$

где g — количество ручек поверхности, в которую он вложен.

Величина $2 - 2g$ в левой части равенства называется *эйлеровой характеристикой* поверхности. В отличие от рода ее имеет смысл рассматривать и для несвязных поверхностей: эйлерова характеристика несвязной поверхности равна сумме эйлеровых характеристик ее компонент связности.

Доказательство.

Пусть $F(G)$ — множество полуребер графа G, $|F(G)| = 2|E(G)|$. Набор ребер графа G задает перестановку на множестве $F(G)$; эта перестановка переводит каждое полуребро во второе полуребро того же ребра. Она является инволюцией без неподвижных точек. Мы будем обозначать ее $\alpha : F(G) \to F(G)$, $\alpha^2 = \mathrm{id}$. Ребра графа G — это орбиты действия группы, порожденной перестановкой α, на множестве $F(G)$.

Пусть $F(G)$ — множество полуребер графа G, $|F(G)| = 2|E(G)|$. Набор ребер графа G задает перестановку на множестве $F(G)$; эта перестановка переводит каждое полуребро во второе полуребро того же ребра. Она является инволюцией без неподвижных точек. Мы будем обозначать ее $\alpha : F(G) \to F(G)$, $\alpha^2 = \mathrm{id}$. Ребра графа G — это орбиты действия группы, порожденной перестановкой α, на множестве $F(G)$.

Если в каждой вершине графа G задан циклический порядок инцидентных ей полуребер, то на $F(G)$ задана перестановка: она переводит каждое полуребро графа G в следующее за ним в выбранном циклическом порядке. Мы будем обозначать эту перестановку $\sigma : F(G) \to F(G)$. Вершины графа G — это орбиты действия группы, порожденной перестановкой σ, т.е. циклы в разложении перестановки σ в произведение независимых циклов; валентности вершин — это длины орбит.

Лекция 3. Графы на поверхностях: задание перестановками

Третья перестановка на множестве $F(G)$ отвечает граням (многоугольникам) вложенного графа. Орбиты порожденной ей группы — это последовательности $(e_1, f_1, \dots)$, полуребер, появлявшиеся в доказательстве теоремы о реализуемости циклического порядка вложением. Мы обозначаем эту перестановку через $\varphi : F(G) \to F(G)$.

Третья перестановка на множестве $F(G)$ отвечает граням (многоугольникам) вложенного графа. Орбиты порожденной ей группы — это последовательности $(e_1, f_1, \dots)$, полуребер, появлявшиеся в доказательстве теоремы о реализуемости циклического порядка вложением. Мы обозначаем эту перестановку через $\varphi : F(G) \to F(G)$.

Theorem

Произведение перестановок α, σ и ϕ^{-1} является тождественной перестановкой.

Лекция 3. Графы на поверхностях: задание перестановками

Третья перестановка на множестве $F(G)$ отвечает граням (многоугольникам) вложенного графа. Орбиты порожденной ей группы — это последовательности $(e_1, f_1, \dots)$, полуребер, появлявшиеся в доказательстве теоремы о реализуемости циклического порядка вложением. Мы обозначаем эту перестановку через $\varphi : F(G) \to F(G)$.

Theorem

Произведение перестановок α, σ и ϕ^{-1} является тождественной перестановкой.

Definition

Вложенным графом (*графом на поверхности*, *картой*, *ленточным графом*) называется тройка перестановок (α, σ, ϕ), действующая на множестве из четного числа элементов, в которой α — инволюция без неподвижных точек и $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \alpha = \mathrm{id}$, рассматриваемая с точностью до автоморфизмов множества.

Лекция 3. Графы на поверхностях: задание перестановками

Третья перестановка на множестве $F(G)$ отвечает граням (многоугольникам) вложенного графа. Орбиты порожденной ей группы — это последовательности $(e_1, f_1, \dots)$, полуребер, появлявшиеся в доказательстве теоремы о реализуемости циклического порядка вложением. Мы обозначаем эту перестановку через $\varphi : F(G) \to F(G)$.

Theorem

Произведение перестановок α, σ и ϕ^{-1} является тождественной перестановкой.

Definition

Вложенным графом (*графом на поверхности, картой, ленточным графом*) называется тройка перестановок (α, σ, ϕ), действующая на множестве из четного числа элементов, в которой α — инволюция без неподвижных точек и $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \alpha = \mathrm{id}$, рассматриваемая с точностью до автоморфизмов множества.

Вложенный граф $\Gamma = (\alpha, \sigma, \phi)$ является связным тогда и только тогда, когда группа, порожденная перестановками α, σ, ϕ действует транзитивно, т.е. имеет единственную орбиту.

- Воспользовавшись формулой Эйлера, докажите, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не допускают вложения в плоскость.

Семинары 3. Задачи

- Воспользовавшись формулой Эйлера, докажите, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не допускают вложения в плоскость.
- Существуют ли вложения графа Петерсена а) в тор; б) в поверхность рода 2?
- Существуют ли вложения а) графа K_5; б) графа $K_{3,3}$; в) графа Петерсена в проективную плоскость?

Семинары 2. Задачи

- Докажите, что результат склейки многоугольника является сферой тогда и только тогда, когда получившийся вложенный граф — дерево.
- Докажите, что из $2n$-угольника нельзя склеить ориентируемую поверхность, род которой превышает $\frac{n}{2}$.

Семинары 2. Задачи

- Докажите, что результат склейки многоугольника является сферой тогда и только тогда, когда получившийся вложенный граф — дерево.
- Докажите, что из $2n$-угольника нельзя склеить ориентируемую поверхность, род которой превышает $\frac{n}{2}$.
-

- Пусть G — остов икосаэдра. В каждой его вершине имеется имеется естественный циклический порядок полуребер, заданный склейкой икосаэдра из треугольников. Занумеруем полуребра в вершине числами $1, 2, 3, 4, 5$ в этом циклическом порядке. Зададим другой циклический порядок полуребер в каждой вершине другим: $1, 3, 5, 2, 4$. Поверхность какого рода мы при этом получим?

- Пусть G — остов икосаэдра. В каждой его вершине имеется имеется естественный циклический порядок полуребер, заданный склейкой икосаэдра из треугольников. Занумеруем полуребра в вершине числами $1, 2, 3, 4, 5$ в этом циклическом порядке. Зададим другой циклический порядок полуребер в каждой вершине другим: $1, 3, 5, 2, 4$. Поверхность какого рода мы при этом получим?

Семинары 2. Задачи

- Пусть G — остов икосаэдра. В каждой его вершине имеется имеется естественный циклический порядок полуребер, заданный склейкой икосаэдра из треугольников. Занумеруем полуребра в вершине числами $1, 2, 3, 4, 5$ в этом циклическом порядке. Зададим другой циклический порядок полуребер в каждой вершине другим: $1, 3, 5, 2, 4$. Поверхность какого рода мы при этом получим?
-
-