Семинар 2.

Напомним определения, данные на семинаре. Пусть V и W - векторные пространства одинаковой размерности, скажем, $n+1$ над основным полем $\mathbf{k}$, где $n \geqslant 1$, и $\tilde{f}: V \xrightarrow{\simeq} W$ - изоморфизм векторных пространств, то есть обратимое линейное отображение из V в W. Рассмотрим проективные пространства $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}'^n := \mathbb{P}(W)$. Так как $\tilde{f}: V \xrightarrow{\simeq} W$ - линейное отображение, то корректно определено биективное отображение проективных пространств

$$f := \mathbb{P}(\tilde{f}): \ \mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}'^n, \ \langle v \rangle \mapsto \langle \tilde{f}(v) \rangle.$$

Оно называется *проективным отображением* из пространства $\mathbb{P}^n$ в пространство $\mathbb{P}'^n := \mathbb{P}(W)$, индуцированным изоморфизмом подлежащих векторных пространств $\tilde{f}: V \xrightarrow{\simeq} W$, или, кратко, *проективизацией* изоморфизма $\tilde{f}$.

Линейной оболочкой подмножества M в векторном пространстве V называется множество *всех* линейных комбинаций векторов из V:

$$\langle M \rangle := \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r \in V \mid r \geqslant 1, \ v_1, ..., v_r \in V, \ \lambda_1, ...\lambda_r \in \mathbf{k}\}.$$

Легко видеть, что $\langle M \rangle$ - векторное подпространство в V.

Проективной оболочкой подмножества S в проективном пространстве $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ называется множество точек

$$\langle S \rangle := \{\langle \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r \rangle \in \mathbb{P}^n \mid r \geqslant 1, \ \langle v_1 \rangle, ..., \langle v_r \rangle \in \mathbb{P}^n, \ \lambda_1, ...\lambda_r \in \mathbf{k}\}.$$

Проективным репером в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ называется совокупность $n+2$ точек $A, \ A_0, ..., A_n$ в $\mathbb{P}^n$ таких, что никакая из них не лежит в проективной оболочке любых n из оставшихся $n+1$ точек из этой совокупности.

Задача 1. Докажите, что для любых проективных реперов $A, \ A_0, \ A_1$ в $\mathbb{P}^1$ и $A', \ A'_0, \ A'_1$ в $\mathbb{P}'^1$ существует единственное проективное отображение проективной прямой $\mathbb{P}^1$ в проективную прямую $\mathbb{P}'^1$, отображающее проективный репер $A, \ A_0, \ A_1$ в $\mathbb{P}^1$ в проективный репер $A', \ A'_0, \ A'_1$ в $\mathbb{P}'^1$, то есть такое, что $f(A) = A, \ f(A_0) = A'_0, \ f(A_1) = A'_1$.

Задача 2. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для любого $n \geqslant 1$.