

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2022
ЛИСТОК 4

1. а) Найдите потенциал, создаваемый на плоскости равномерно заряженным диском радиуса R :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq R} \log |z - \zeta| d^2 \zeta.$$

Указание: Утомительного прямого вычисления можно избежать, если воспользоваться соображениями симметрии.

Убедитесь в непрерывности потенциала и его нормальной производной на границе диска.

б) При попытке интегрирования “в лоб” вам встретится интеграл

$$\int_0^{2\pi} \log(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) d\varphi.$$

Найдите его и доведите прямое вычисление до конца.

2. Найдите гармонические моменты

$$t_k = -\frac{1}{\pi k} \int_{\mathbb{C} \setminus D} z^{-k} d^2 z$$

для следующих областей D : а) для круга радиуса R с центром в точке a ($R > |a|$); б) для эллипса с полуосями a, b с центром в начале координат.

3. Найдите потенциал внутри равномерно заряженного эллипса с полуосями a, b .

4. Найдите потенциал простого слоя, создаваемый равномерно заряженной окружностью радиуса R :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \oint_{|\zeta|=R} \log |z - \zeta| |d\zeta|.$$

Убедитесь в непрерывности потенциала и найдите скачок его нормальной производной.

5. Найдите потенциал двойного слоя

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \oint_{\Gamma} \partial_{n_\zeta} \log |z - \zeta| |d\zeta|$$

в случае, когда контур Γ представляет собой а) окружность радиуса R , б) произвольную замкнутую гладкую кривую без самопересечений. Убедитесь в непрерывности нормальной производной потенциала и найдите его скачок.

6. Какова должна быть плотность зарядов $\rho(z) > 0$ на (гладкой) границе односвязной компактной области D , чтобы потенциал внутри D был постоянным?

7. Найдите асимптотику потенциала двойного слоя на бесконечности.