Прикладные методы анализа – 2022

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

Потенциал в физике – это вещественнозначная скалярная функция, производные которой по пространственным координатам представляют собой компоненты вектора напряженности поля (электрического или гравитационного). Потенциалы электрических и гравитационных полей в пустоте удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е. являются гармоническими функциями. Отсюда видна важность теории потенциала и ее связь с теорией гармонических функций. Для простоты мы подробно рассмотрим только потенциалы в двух измерениях, где анализ облегчается тесной связью с теорией функций комплексного переменного. С точки зрения трехмерной картины двумерные потенциалы создаются распределением зарядов с плотностью, инвариантной относительно смещения вдоль оси z, т.е. зависящей только от x и y.

Объемные потенциалы. Точечный заряд e в двух измерениях, находящийся в точке z_0, создает вокруг себя логарифмический потенциал $\varphi(z) = e\log|z-z_0|$. Тогда потенциал, создаваемый областью D, в которой заряд распределен с плотностью $\rho(z)$, запишется как непрерывная суперпозиция логарифмических потенциалов, создаваемых всеми точками области:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}} \rho(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d^2\zeta.$$

В вещественных обозначениях, которые иногда более наглядны, эта формула выглядит так:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}} \rho(x',y')\log\Big((x-x')^2+(y-y')^2\Big)dx'dy'.$$

Мы будем предполагать, что область D компактна, а функция ρ ограничена и не будем требовать ее непрерывности. Тогда интеграл можно распространить на всю плоскость, рассматривая точки границы как точки разрыва функции ρ, равной нулю вне D. Логарифмическая особенность подынтегрального выражения при $\zeta \to z$ интегрируема, и интеграл хорошо определен.

Подействовав оператором Лапласа на правую часть и пользуясь тем, что $\Delta \log |z| = 2\pi\delta(z)$, получим:

$$\Delta\varphi(z) = \begin{cases} 4\rho(z) & \text{если } z \in \mathsf{D}, \\ \\ 0 & \text{если } z \notin \mathsf{D}. \end{cases}$$

Мы видим, что внутри области потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, а вне ее – уравнению Лапласа. Вне области (т.е. там, где зарядов нет) потенциал является гармонической функцией. При $|z| \to \infty$ она ведет себя как

$$\varphi(z) = \frac{Q}{\pi} \log |z|^2 + O(1/z), \qquad |z| \to \infty,$$

где

$$Q = \int_{\mathsf{D}} \rho(\zeta) d^2\zeta$$

полный заряд, находящийся в области.

Введем также напряженность поля, которая получается дифференцированием формулы для потенциала по пространственным переменным под знаком интеграла:

$$E(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathsf{D}} \frac{\rho(\zeta) d^2\zeta}{z - \zeta} = \frac{1}{2}\Big(E_x(x,y) - iE_y(x,y)\Big),$$

где

$$E_x(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathsf{D}} \frac{\rho(x',y')(x-x')}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx'dy',$$
$$E_y(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathsf{D}} \frac{\rho(x',y')(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx'dy'.$$

Если точка z лежит вне области D, подынтегральная функция непрерывна по обоим аргументам, и дифференцирование под знаком интеграла законно. Поэтому вне D мы имеем $E(z) = \partial_z\varphi(z)$. Случай, когда точка z находится внутри области, требует специального исследования. Мы покажем, что дифференцирование под знаком интеграла законно и в этом случае.

Теорема. *Для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем*

$$E(z) = \partial_z\varphi(z).$$

Доказательство. Доказательство удобно провести в вещественных обозначениях. Докажем, например, что

$$E_x(x,y) = \partial_x\varphi(x,y) \quad \text{в том числе и если } z = x + iy \in \mathsf{D}.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{\varphi(x+\delta x, y) - \varphi(x,y)}{\delta x} - E_x(x,y)\right| < \varepsilon \quad \text{если } |\delta x| < \delta.$$

Заключим точку (x, y) в достаточно малый диск $\mathsf{B}_{\delta'}$ радиуса δ' с центром в точке (x, y) и разобьем интеграл для φ на два слагаемых $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 соответствуют интегрированию по $\mathsf{B}_{\delta'}$ и $\mathsf{D} \setminus \mathsf{B}_{\delta'}$ соответственно. Аналогичным образом на два слагаемых разбивается и интеграл для E_x: $E_x = E_x^{(1)} + E_x^{(2)}$. Выбор δ' будет сделан в дальнейшем.

Оценим

$$\left|\frac{\varphi(x+\delta x, y) - \varphi(x,y)}{\delta x} - E_x(x,y)\right| \leq \left|\frac{\varphi_2(x+\delta x, y) - \varphi_2(x,y)}{\delta x} - E_x^{(2)}(x,y)\right|$$

$$+ \left|E_x^{(1)}(x,y)\right| + \left|\frac{\varphi_1(x+\delta x, y) - \varphi_1(x,y)}{\delta x}\right|$$

и покажем, что каждое из слагаемых в правой части можно сделать меньше чем $\varepsilon/3$. Для первого слагаемого это совсем просто. Т.к. точка (x, y) лежит вне области $\mathsf{D} \setminus \mathsf{B}_{\delta'}$, дифференцирование под знаком интеграла законно, и для любого ε можно найти такое δ'', что

$$\left|\frac{\varphi_2(x+\delta x, y) - \varphi_2(x,y)}{\delta x} - E_x^{(2)}(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{если } |\delta x| < \delta''.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\left|E_x^{(1)}(x,y)\right| = \left|\frac{2}{\pi}\int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \frac{\rho(x',y')(x-x')}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx'dy'\right| \leq C \int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \frac{dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

$$= C \int_0^{\delta'} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{r} = 2\pi C \delta' < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, разберемся с третьим слагаемым

$$S_1 := \left|\frac{\varphi_1(x+\delta x, y) - \varphi_1(x,y)}{\delta x}\right| = \left|\frac{1}{\pi \delta x}\int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \rho(x',y') \log\frac{\ell_1^2(x',y')}{\ell^2(x',y')}\, dx'dy'\right|,$$

где

$$\ell_1(x',y') = \sqrt{(x+\delta x - x')^2 + (y-y')^2},$$

$$\ell(x',y') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

В треугольнике с вершинами в точках (x, y), (x', y'), $(x+\delta x, y)$ стороны имеют длины ℓ, ℓ_1 и $|\delta x|$. Следовательно, мы имеем

$$|\ell_1 - \ell| \leq |\delta x|.$$

Воспользовавшись неравенством

$$|\log t| \leq |t - t^{-1}| \quad \text{при } t > 0,$$

можем записать
$$\left|\log \frac{\ell_1}{\ell}\right| \le 2\frac{|\ell_1-\ell|}{\sqrt{\ell_1\ell}},$$
что дает следующую оценку для S_1:
$$S_1 \le \frac{2}{\pi}\int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \frac{|\rho(x',y')|}{\sqrt{\ell_1\ell}}\,dx'dy' \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{B}_{\delta'}} |\rho(x',y')|\Big(\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell}\Big)dx'dy',$$
где мы воспользовались неравенством
$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$
Продолжая цепочку неравенств, пишем:
$$S_1 \le C\left(\int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \frac{dx'dy'}{\ell} + \int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \frac{dx'dy'}{\ell_1}\right).$$
Первый интеграл, очевидно, равен $2\pi\delta'$. Вычислить точно второй интеграл затруднительно, но его можно оценить:
$$\int_{\mathsf{B}_{\delta'}} \frac{dx'dy'}{\ell_1} \le \int_{\mathsf{B}'_{2\delta'}} \frac{dx'dy'}{\ell_1} = 4\pi\delta',$$
где $\mathsf{B}'_{2\delta'}$ – диск радиуса $2\delta'$ с центром в точке $(x+\delta x, y)$. Отсюда видно, что при соответствующем выборе δ' можно обеспечить неравенство $S_1 \le 6\pi C\delta' < \varepsilon/3$. Взяв $\delta = \min(\delta', \delta'')$, получим то, что хотели доказать. ■

Теорема. *Если функция плотности $\rho(z)$ является ограниченной, объемный потенциал $\varphi(z)$ и его первые производные по пространственным переменным непрерывны везде в плоскости, в том числе на границе области* D.

Идея доказательства. В доказательстве используется понятие равномерно сходящегося интеграла. Интеграл
$$I(z) = \int_{\mathsf{D}} F(z,\zeta)f(\zeta)d^2\zeta$$
называется равномерно сходящимся в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ, что
$$|I_\delta(z)| = \left|\int_{\mathsf{D}_\delta} F(z,\zeta)f(\zeta)d^2\zeta\right| < \varepsilon$$
для любой точки z, расстояние от которой до z_0 меньше δ, и для любой области D_δ, содержащей точку z_0 и имеющей диаметр, меньший либо равный δ. С помощью приема, аналогичного тому, который был использован при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что интеграл, равномерно сходящийся в точке z, есть непрерывная функция в этой точке. Утверждение теоремы следует из того, что интегралы для потенциала и напряженности поля являются равномерно сходящимися. Подробное доказательство можно найти в книге [6]. ■

Обратная задача теории потенциала. Важный частный случай – случай постоянной плотности $\rho(z) = 1$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}} \log|z-\zeta|^2 d^2\zeta.$$

Пользуясь разложением логарифма

$$\log\Bigl(1-\frac{\zeta}{z}\Bigr) + \log\Bigl(1-\frac{\bar\zeta}{\bar z}\Bigr) = -2\mathrm{Re}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\Bigl(\frac{\zeta}{z}\Bigr)^k,$$

найдем разложение потенциала в окрестности бесконечности:

$$\varphi(z) = t_0\log|z|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\,v_k z^{-k},$$

где

$$t_0 = \frac{\text{площадь области } \mathsf{D}}{\pi},$$

а величины

$$v_k = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}}\zeta^k d^2\zeta$$

называются гармоническими моментами области D. Обратная задача теории потенциала заключается в восстановлении формы области из знания ее площади и всех гармонических моментов (т.е. из знания поля, которое равномерно заряженная область создает вне себя). Обратная задача теории потенциала (в ее трехмерной версии) имеет приложения в геофизике. В общем случае она не имеет алгоритмического решения. Более того, решение может быть не единственно, т.е. существуют геометрически разные области с одинаковыми моментами. Но при некоторых предположениях решение единственно. Например, известен такой результат П.С. Новикова: если две ограниченные области звездны относительно общей точки и создают равные потенциалы вне себя, то они совпадают[1]. Кроме того, имеется утверждение о локальной единственности области, имеющей заданные моменты (см. ниже).

Без ограничения общности будем считать, что $0 \in \mathsf{D}$. Кроме того будем предполагать, что область D односвязна. Найдем разложение потенциала внутри области в окрестности точки 0. Пишем:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{B}_R}\log|z-\zeta|^2 d^2\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{B}_R\setminus\mathsf{D}}\log|z-\zeta|^2 d^2\zeta \equiv \varphi_0(z) - \varphi_1(z),$$

где B_R – диск настолько большого радиуса R, что вся область D целиком помещается внутри него. Здесь

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\leq R}\log|z-\zeta|^2 d^2\zeta.$$

При действии оператора Лапласа на эту функцию должно получиться 4. Принимая во внимание соображения симметрии при вращении относительно начала координат, заключаем, что единственная такая функция – это $|z|^2 + \mathrm{const}$. Отсюда находим:

$$\varphi_0(z) = |z|^2 + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\leq R}\log|\zeta|^2 d^2\zeta.$$

[1]Область называется звездной относительно точки z_0, если вместе с каждой своей точкой z она содержит отрезок, их соединяющий.

Можно, разумеется, получить тот же результат и прямым интегрированием. Функция $\varphi_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{B}_R\setminus\mathsf{D}} \log|z-\zeta|^2 d^2\zeta$ гармоническая в D; ее разложение можно получить непосредственно, разлагая логарифм:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{B}_R\setminus\mathsf{D}} \log|\zeta|^2 d^2\zeta + 2\mathrm{Re}\sum_{k\geq 1} t_k z^k,$$

где

$$t_k = -\frac{1}{\pi k}\int_{\mathbb{C}\setminus\mathsf{D}} \zeta^{-k} d^2\zeta, \quad k\geq 1$$

являются гармоническими моментами внешности области D. Объединяя эти формулы, получаем разложение потенциала внутри области в начале координат:

$$\varphi(z) = |z|^2 + v_0 - 2\mathrm{Re}\sum_{k\geq 1} t_k z^k,$$

где

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}} \log|\zeta|^2 d^2\zeta.$$

Отметим, что интегралы, определяющие моменты t_1 и t_2 являются формально расходящимися на бесконечности. Их надо регуляризовать, условившись первым проводить интегрирование по углу в полярной системе координат, тогда вклад от внешности большого круга, целиком охватывающего область D, равен нулю.

Моменты внешности (вместе с площадью) служат характеристиками области, альтернативными моментам внутренности v_k. По теореме Стокса их можно представить как контурные интегралы

$$t_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathsf{D}} \bar{z}dz, \qquad t_k = \frac{1}{2\pi i k}\oint_{\partial\mathsf{D}} z^{-k}\bar{z}dz, \qquad k\geq 1.$$

Про $\{v_k\}$ и $\{t_k\}$ говорят как о взаимно дополнительных наборах моментов. Если заданы моменты v_k и площадь, моменты внешности при изменении формы области являются функциями от них, и наоборот. Для моментов внешности можно точно так же поставить обратную задачу теории потенциала. Отметим, что t_0, v_0 вещественны, а t_k, v_k при $k\geq 1$ вообще говоря комплексны.

Можно доказать следующие важные соотношения:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t_k} = \frac{\partial v_k}{\partial t_j}$$

(см. статью [7]). Отсюда следует, что существует вещественнозначная функция $F = F(t_0, t_1, t_2, \ldots)$ такая, что

$$v_j = \frac{\partial F}{\partial t_j}.$$

Эта функция представляется следующим двойным интегралом по области D:

$$F = -\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathsf{D}}\int_{\mathsf{D}} \log\left|z^{-1}-\zeta^{-1}\right| d^2z d^2\zeta,$$

где правую часть надо понимать как функцию моментов $t_0, t_1, t_2, \ldots$.

Рассмотрим пространство всех содержащих 0 односвязных ограниченных областей D с аналитической границей. Оказывается, в качестве локальных координат в этом бесконечномерном пространстве можно взять площадь области D и гармонические моменты t_k области $\mathbb{C} \setminus \mathsf{D}$. Точнее, координатами являются t_0, $\{\mathrm{Re}\, t_k\}$, $\{\mathrm{Im}\, t_k\}$ или t_0, $\{t_k\}$, $\{\bar{t}_k\}$. Такая возможность основана на результате о локальной единственности области с заданными моментами, который будет доказан ниже.

Теорема. *Любая однопараметрическая деформация* $\mathsf{D}(t)$ *области* $\mathsf{D} = \mathsf{D}(0)$, *сохраняющая все величины* t_k *(т.е. такая, что* $\partial_t t_k = 0$ *для всех* $k \geq 0$*), тривиальна:* $D(t) = D(0)$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{D}(t)$ – деформация с вещественным параметром t. Зададим замкнутую кривую $\gamma(t) = \partial \mathsf{D}(t)$ параметрически $z(\sigma, t) = x(\sigma, t) + iy(\sigma, t)$ $(0 \leq \sigma < 2\pi)$ и определим нормальную скорость деформации $V_n(z) = \delta n(z)/\delta t$, $z \in \gamma$. Пусть

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{|dz|}, \frac{dy}{|dz|} \right), \qquad \vec{n} = \left(\frac{dy}{|dz|}, -\frac{dx}{|dz|} \right)$$

касательный и нормальный единичные векторы к кривой γ, а $\vec{U} = (x_t, y_t)$ – скорость точки кривой (производные здесь берутся при постоянном σ). Тогда имеем

$$V_n = (\vec{n}, \vec{U}) = \frac{dy x_t}{|dz|} - \frac{dx y_t}{|dz|} = \frac{d\sigma}{|dz|}(x_t y_\sigma - x_\sigma y_t).$$

В терминах $z, \bar{z}$ запишем эту формулу в виде

$$V_n = \frac{d\sigma}{2i|dz|}(\bar{z}_t z_\sigma - \bar{z}_\sigma z_t).$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$C(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\bar{z}\, dz}{z - a}.$$

Значения этой функции при $a \in \mathsf{D}$ и $a \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{D}$ обозначим соответственно $C^+(a)$ и $C^-(a)$. Разложения функций $C^\pm$ в ряд Тейлора в 0 и ∞ имеют вид

$$C^+(z) = \sum_{k \geq 1} k t_k z^{k-1}, \qquad C^-(z) = -\frac{t_0}{z} - \sum_{k \geq 1} v_k z^{-k-1},$$

где

$$v_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathsf{D}} z^k \, d^2 z = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma z^k \bar{z} \, dz$$

дополнительный набор гармонических моментов (моменты внутренности).

Найдем производную по t функции $C(a)$ прямым дифференцированием:

$$\begin{aligned} 2\pi i \partial_t C(a) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\bar{z}_t z_\sigma + \bar{z} z_{\sigma,t}}{z - a} - \frac{\bar{z} z_t z_\sigma}{(z-a)^2} \right) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\bar{z}_t z_\sigma + \bar{z} z_{\sigma,t}}{z - a} \, d\sigma + \bar{z} z_t d\Big(\frac{1}{z-a}\Big) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\bar{z}_t z_\sigma - z_t \bar{z}_\sigma}{z - a} \, d\sigma. \end{aligned}$$

Используя выражение для скорости нормальной деформации кривой запишем результат в виде

$$\partial_t C(a) = \frac{1}{\pi}\int_{\partial \mathsf{D}} \frac{V_n(z)|dz|}{z-a},$$

где $V_n(z) \in \mathbb{R}$. Согласно формулам Сохоцкого-Племеля, скачок функции $\partial_t C$ на границе равен

$$\partial_t C^+(z) - \partial_t C^-(z) = 2i\frac{V_n(z)}{\tau(z)},$$

где $\tau(z) = dz/|dz| = i\nu(z) = i\dfrac{|w'(z)|\, w(z)}{w'(z)}$ – единичный касательный вектор к кривой γ, представленный как комплексное число. Здесь $w(z)$ – конформное отображение внешности области D на внешность единичного круга.

В достаточно малой окрестности точки 0, в которой $|a| < |z|$ для всех $z \in \gamma$, можно разложить подынтегральное выражение для производной $\partial_t C^+$ и почленно проинтегрировать:

$$\partial_t C^+(a) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} a^k \oint_\gamma z^{-k-1}\bar{z}dz\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\partial_t t_k)a^{k-1} = 0,$$

поскольку по условию $\partial_t t_k = 0$ для всех $k \geq 1$. Отсюда в силу единственности аналитического продолжения заключаем, что $\partial_t C^+ = 0$ везде в области D. Поэтому из формулы для скачка видим, что

$$2i\frac{V_n(z)}{\tau(z)} = 2\frac{V_n(z)w'(z)}{|w'(z)|\, w(z)}$$

является граничным значением аналитической функции $h(z) := -\partial_t C^-(z)$ в области D^c. При этом разложение в окрестности ∞

$$h(z) = \partial_t C^-(z) = \frac{\partial_t t_0}{z} + O(z^{-2}) = O(z^{-2})$$

показывает, что $h(z)$ имеет в ∞ ноль как минимум второго порядка. Поскольку $w'(z) \neq 0$ в D^c, функция $g(z) := h(z)\dfrac{w(z)}{w'(z)}$ голоморфна в этой области, имеет вещественные граничные значения $2\dfrac{V_n(z)}{|w'(z)|}$ и равна 0 в ∞. Мнимая часть этой функции гармонична в $\mathbb{C} \setminus \mathsf{D}$ и равна 0 на границе. В силу единственности решения задачи Дирихле она равна 0 в $\mathbb{C} \setminus \mathsf{D}$. Следовательно, $g(z)$ принимает чисто вещественные значения, а, значит, равна константе. Устремив $z \to \infty$, видим, что константа равна 0. Тем самым мы доказали, что $V_n(z) = \delta n(z)/\delta t = 0$, что и означает отсутствие деформации. ■

Потенциал простого слоя. Потенциал простого слоя – это потенциал, создаваемый заряженной линией Γ на плоскости. Будем считать контур Γ гладким, замкнутым и ограничивающим компактную односвязную область D. Интегральное представление для потенциала простого слоя записывается в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\oint_\Gamma \rho(\xi)\log|z-\xi|^2|d\xi|,$$

где $|d\xi| = ds$ – элемент длины вдоль контура. Функция ρ – линейная плотность зарядов. Будем считать, что она ограничена и непрерывна на контуре. Случаи разрывной функции ρ или незамкнутого контура несколько сложнее, т.к. требуют дополнительного анализа поведения потенциала вблизи точек разрыва или концов.

Очевидно, функция $\varphi(z)$ гармоническая везде вне контура. На самом контуре имеется особенность, но функция $\varphi(z)$ непрерывна, т.е. $\varphi(z_+) = \varphi(z_-) = \varphi(z)$, где $z \in \Gamma$, а $z_\pm$ неограниченно приближается к точке контура z соответственно изнутри и снаружи. Мы не будем строго доказывать это утверждение. Интуитивно оно понятно из того, что подынтегральная функция имеет всего лишь интегрируемую особенность в совпадающих точках на контуре, и потому все равно, с какой стороны мы приближаемся к контуру или вообще точка z лежит на нем.

Однако, пространственные производные потенциала простого слоя терпят разрыв на контуре. Рассмотрим, например, нормальные производные $\partial_{n_\pm}\varphi(z)$ внутри и снаружи, где вектор нормали считается направленным наружу в обоих случаях. Мы имеем:

$$\partial_{n_\pm}\varphi(z) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[\nu(z)\partial_z \oint_\Gamma \rho(\xi)\log|z_\pm - \xi|^2|d\xi|\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\oint_\Gamma \frac{\nu(z)\rho(\xi)|d\xi|}{z_\pm - \xi} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\oint_\Gamma \frac{\nu(z)\rho(\xi)d\xi}{\nu(\xi)(\xi - z_\pm)},$$

где точка z лежит на контуре, $\nu(z)$ – единичный вектор нормали, представленный как комплексное число. В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $d\xi = -i\nu(\xi)|d\xi|$. Поэтому

$$\partial_{n_+}\varphi(z) - \partial_{n_-}\varphi(z) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\oint_\Gamma \frac{\nu(z)\rho(\xi)d\xi}{\nu(\xi)(\xi - z_+)} - \oint_\Gamma \frac{\nu(z)\rho(\xi)d\xi}{\nu(\xi)(\xi - z_-)}\right].$$

Теперь можно применить формулу Сохоцкого-Племеля

$$\oint_\Gamma \frac{\nu(z)\rho(\xi)d\xi}{\nu(\xi)(\xi - z_+)} - \oint_\Gamma \frac{\nu(z)\rho(\xi)d\xi}{\nu(\xi)(\xi - z_-)} = 2\pi i\rho(z)$$

и найти:

$$\partial_{n_+}\varphi(z) - \partial_{n_-}\varphi(z) = 4\rho(z).$$

Потенциал двойного слоя. Потенциал двойного слоя – это потенциал, создаваемый линией Γ, заполеннной электрически нейтральными диполями с некоторой (непрерывной) плотностью ρ. Интегральное представление для потенциала двойного слоя записывается в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\oint_\Gamma \rho(\xi)\partial_{n_\xi}\log|z - \xi|^2|d\xi|.$$

Очевидно, функция $\varphi(z)$ гармоническая везде вне контура.

Потенциал двойного слоя имеет скачок на контуре. Чтобы его найти, напишем:

$$\varphi(z) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\oint_\Gamma \frac{\rho(\xi)\nu(\xi)|d\xi|}{\xi - z} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\oint_\Gamma \frac{i\rho(\xi)d\xi}{\xi - z} = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\oint_\Gamma \frac{\rho(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

и воспользуемся формулой Сохоцкого-Племеля. Мы получим:

$$\varphi(z_+) - \varphi(z_-) = -4\rho(z).$$

Вместе с тем нормальная производная непрерывна на контуре. В самом деле,

$$\partial_{n_\pm}\varphi(z) = -\frac{2}{\pi}\,\partial_{n_\pm}\mathrm{Im}\oint_\Gamma \frac{\rho(\xi)d\xi}{\xi - z_\pm} = \frac{2}{\pi}\,\partial_s\mathrm{Re}\oint_\Gamma \frac{\rho(\xi)d\xi}{\xi - z_\pm},$$

где ∂_s – производная вдоль контура и мы воспользовались условиями Коши-Римана. Тогда

$$\begin{aligned}\partial_{n_+}\varphi(z) - \partial_{n_-}\varphi(z) &= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[\partial_s \oint_\Gamma \frac{\rho(\xi)d\xi}{(\xi - z_+)} - \partial_s \oint_\Gamma \frac{\rho(\xi)d\xi}{(\xi - z_-)}\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\partial_s(2\pi i\rho(z))\Big) = 0.\end{aligned}$$

Неформальное обсуждение потенциала двойного слоя можно найти в книге [8].

В трех измерениях потенциалы простого и двойного слоя определяются как интегралы по заряженной поверхности, вложенной в трехмерное пространство, причем вместо логарифма в качестве ядра входит функция $1/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ (функция Грина оператора Лапласа в пространстве). Свойства объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоя качественно похожи на то, что происходит в двумерии. Так, объемный потенциал непрерывен на границе области вместе со своими первыми производными, потенциал простого слоя непрерывен на поверхности, а его нормальная производная испытывает скачок. Потенциал двойного слоя разрывен на поверхности, а его нормальная производная непрерывна. Более подробно про потенциалы простого и двойного слоя в пространстве можно почитать в книгах [4, 5, 6].

Теория потенциала в размерности 1. Все основные утверждения теории потенциала имеют смысл и в размерности $d = 1$ (на прямой). Этот пример хотя и достаточно тривиален, но поучителен.

Оператор Лапласа в одном измерении – это просто оператор взятия второй производной ∂_x^2. Функция Грина этого оператора – это модуль разности координат двух точек на прямой, поскольку

$$\partial_x^2|x - y| = 2\delta(x - y).$$

Эта функция в одном измерении заменяет собой логарифм. Гармонические функции – все линейные функции вида $\alpha x + \beta$. Односвязная область D – это просто отрезок $[a, b]$. Задача Дирихле ставится так: найти гармоническую (т.е. линейную) функцию f на отрезке $[a, b]$ такую, что $f(a) = h_a$, $f(b) = h_b$, где h_a, h_b – заданные числа. Очевидно, решение дается формулой

$$f(x) = \frac{h_a - h_b}{a - b}\,x + \frac{ah_b - bh_a}{a - b}.$$

Функция Грина оператора ∂_x^2 с граничными условиями Дирихле (т.е. симметричная функция $G(x, y)$ такая, что $\partial_x^2 G(x, y = 2\delta(x - y)$, $G(x, y) = 0$ если хотя бы одна из точек x, y совпадает с a или b) дается явной формулой

$$G(x, y) = |x - y| + \frac{2(xy + ab)}{b - a} - \frac{b + a}{b - a}\,(x + y).$$

Легко проверить, что решение задачи Дирихле выражается через нее формулой

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(h_b\partial_y G(x,y)\Big|_{y=b} - h_a\partial_y G(x,y)\Big|_{y=a}\Big),$$

которая представляет собой непосредственный одномерный аналог соответствующей формулы в двух и более измерениях.

Объемный потенциал выражается интегралом

$$\varphi(x) = \int_a^b \rho(y)|x-y|dy,$$

так что

$$\partial_x^2\varphi(x) = \begin{cases} 2\rho(x), & x \in [a,b], \\ \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Легко видеть, что объемный потенциал и его первая производная непрерывны на всей прямой. Потенциал простого слоя запишется в виде

$$\varphi(x) = \rho_a|x-a| + \rho_b|x-b|.$$

Очевидно, что он непрерывен, а его производная испытывает скачок на конце отрезка:

$$\partial_x\varphi(x)\Big|_{x=b+0} = \rho_a + \rho_b, \quad \partial_x\varphi(x)\Big|_{x=b-0} = \rho_a - \rho_b,$$

и аналогично в точке a. Не представляет труда также записать аналог потенциала двойного слоя.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.