Семинар 5

В дальнейшем $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис векторного пространства V. Скажем, что элемент алгебры Грассмана ω_1 делится на другой ее элемент ω_2, если существует такой третий элемент ω_3, что $\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_3$.

1. Элемент $\omega \in \wedge V$ тогда и только тогда делится на $v \in V$, когда $v \wedge \omega = 0$. Доказать.

2. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_s$ – линейно независимое семейство векторов из V. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: если элемент $\omega \in \wedge V$ делится на любой вектор семейства, то он делится и на их произведение.

3. Для ненулевого элемента $\omega \in \wedge^r V$ рассмотрим подпространство $W \subset V$, состоящее из аннулирующих ω векторов. Доказать, что $\dim W \leq r$, причем равенство достигается на разложимых элементах ω.

4. Обратить элементы алгебры Грассмана или доказать их необратимость:

а) $e_1 + e_2 \wedge e_3$;

б) $1 + e_1$;

в) $2 + e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$.

5. Рассмотрев композицию морфизмов линейных пространств, провести детальный вывод формулы Бинэ-Коши.

6. С помощью алгебры Грассмана получить правило (формулу) Лапласа разложения определителя по любым его k строкам (на саму формулу можно посмотреть в БСЭ или в Википедии).

7*. Дана матрица 2×4. Могут ли ее миноры второго порядка принимать значения $1, 2, 3, 4, 5, 6$?