Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать мне на почту artamkin@mail.ru , ДО УТРА СРЕДЫ перед следующим занятием.

Задания со 2 занятия.

(1) **Развитие задачи 3 с прошлого занятия.**

(a) **Приводимые кривые.** Мы выяснили, что кривые (e), (f) и (g) — приводимы, остальные неприводимы. Кольцо регулярных функций для (e) описывается очень просто — см. задачу 2 ниже. Для описания колец регулярных функций на кривых (f) и (g) предлагается построить регулярные отображения из кривой (e) в них, и затем описать соответствующие отображения колец регулярных функций.

(b) **Недоумение про факториальность.** Мы выяснили, что кривые (c) и (d) (окружность и гипербола) изоморфны, поскольку переводятся друг в друга бирегулярным (даже аффинным!) преобразованием. (Замена $u = \frac{1}{2}(x + iy)$, $v = \frac{1}{2i}(x - iy)$ делает из окружности гиперболу.) Кольцо регулярных функций на гиперболе легко вычисляется, это кольцо полиномов Лорана $\mathbf{k}[u][\frac{1}{u}]$; мы знаем, что оно факториально. А в изоморфном ему кольце регулярных функций на окружности $x^2 + y^2 = 1$ имеем неоднозначное на первый взгляд разложение на множители $y^2 = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Где ошибка?

(c) **Как доказывать неизоморфность аффинной прямой.** На примере кривой (d) (окружность $x^2 + y^2 = 1$) был предложен следующий метод доказательства неизоморфности ее аффинной прямой. Пусть они изоморфны, тогда при изоморфизме кольца регулярных функций на окружности с кольцом многочленов $\mathbf{k}[t]$ (регулярные функции на аффинной прямой) функциям x и y на окружности соответствуют какие-то многочлены $P(t)$ и $Q(t)$, такие что $P(t)^2 + Q(t)^2 = 1$. Нетрудно проверить, что требуемых многочленов быть не может. Предлагается придумать аналогичное рассуждение для кривых (h), (i) и (j).

(d) **Рациональные функции.** Поскольку кривые (a)-(d) и (h)-(j) неприводимы, кольца регулярных функций на них не имеют делителей нуля и потому вкладываются в свои поля частных. Для аффинной прямой это поле рациональных функций от одной переменной $\mathbf{k}(t)$. Для каких кривых из списка поля частных изоморфны $\mathbf{k}(t)$ (такие кривые называются *рациональными*), а для каких — нет?

(2) Докажите, что кольцо регулярных функций $\mathbf{k}[X]$ представляется в виде прямого произведения тогда и только тогда, когда X несвязно, т.е. $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 замкнуты и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

(3) Придумайте геометрические условия на регулярное отображение аффинных многообразий $f : X \to Y$, при которых гомоморфизм $f^* : \mathbf{k}[Y] \to \mathbf{k}[X]$

(a) инъективен;

(b) сюръективен.