7 Лекция 7. Линейные неавтономные системы системы: общая теория

7.1 Глобальная теорема существования и единственности

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(t)x,\ A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ A \in C^0(I). \tag{1}$$

Теорема 1 *Для каждого начального условия $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши* (1), (2)*:*

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

существует и единственно.

Эта теорема очень легко выводится из глобальной теоремы о непрерывной зависимости, которая будет доказана немного позже.

Теорема 2 *Пусть неавтономное уравнение*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3}$$

с непрерывной и липшицевой по x правой частью имеет решение $\varphi(t)$, определенное на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $t_0 = [a, b]$ существует такая окрестность U точки $x_0 = \varphi(t_0)$, что для любого $x \in U$ решение $\varphi(t, x)$ с начальным условием $\varphi(t_0, x) = x$ определено на отрезке $[a, b]$, и отображение $\varphi : [a, b] \times U \to \mathbb{R}^n,\ (t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ непрерывно по (t, x) в $[a, b] \times U$.

Доказательство теоремы 1. Отметим, что если $\varphi(t, x)$ - решение с начальным условием (2), то для любого $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\varphi(t, x)$ - решение с начальным условием

$$\lambda\varphi(t_0, x) = \lambda x. \tag{4}$$

Уравнение (1) имеет решение $\varphi \equiv 0$, определенное на всем интервале I. Возьмем произвольный отрезок $[a, b] \subset I$. Для данного t_0 возьмем окрестность U точки 0 такую, что для каждого $x \in U$ решение $\varphi(t, x)$ с начальным условием (2) определено на $[a, b]$. Такое U существует по теореме 2. Возьмем ε так, что $\varepsilon x_0 \in U$. Тогда искомое решение имеет вид

$$\varphi(t, x_0) = \varepsilon^{-1}\varphi(t, \varepsilon x_0). \tag{5}$$

□

7.2 Теорема об изоморфизме

Теорема 3 *Пространство решений уравнения* (1) *изоморфно пространству начальных условий* $\mathbb{R}^n$. *Для любого* $t_0 \in I$ *изоморфизм задается отображением пространства решений в* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\varphi \to \varphi(t_0).$$

Доказательство Отображение определено по теореме 1. Оно очевидно линейно. Это эпиморфизм по теореме существования, и мономорфизм по теореме единственности. $\square$

Итак, пространство решений уравнения (1) линейно и n-мерно. Базис в этом пространстве называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) уравнения (1).

7.3 Фундаментальная матрица решений (ФМР)

Определение 1 *Матрица, столбцы которой образуют ФСР, называется ФМР. Определитель этой матрицы - определитель Вронского.*

Если - $X(t)$ - ФМР уравнения (1), то

$$\dot{X} = A(t)X(t) \tag{6}$$

Проверяется равенство столбцов.

Обозначение: $W(t) = \det X(t)$.

Предложение 1

$$W(t) \neq 0. \tag{7}$$

Доказательство Пусть $W(t_0) = 0$. Тогда столбцы матрицы $X(t_0)$ линейно зависимы. По теореме об изоморфизме, соответствующие решения тоже линейно зависимы - противоречие. $\square$

7.4 Метод вариации постоянной

Для однородного уравнения (1) общее решение имеет вид

$$x(t) = X(t)c,$$

где $X(t)$ - ФМР, $c \in \mathbb{R}^n$. Для неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x + b(t) \tag{8}$$

ищем решение в виде
$$x(t) = X(t)c(t).$$
Подставляем это выражение в уравнение (8).
$$\dot{x}(t) \equiv \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t).$$
В силу (6), первые члены в обеих частях сокращаются. Получаем:
$$X(t)\dot{c}(t) = b(t).$$
$$\dot{c}(t) = X^{-1}(t)b(t).$$
это позволяет найти $c(t)$ и $x(t)$.

7.5 Формула Лиувилля-Остроградского

Теорема 4 *Пусть* $X(t)$ *- ФМР уравнения* (1), $W(t) = \det X(t)$. *Тогда*
$$\dot{W}(t) = (trA)w(t)$$

Доказательство
$$X(t+h) = X(t) + A(t)X(t)h + o(h)$$
$$\det X(t+h) = \det[(E + A(t)h + o(h))X(t)] = \det(E + A(t)h + o(h)) \det X(t).$$

Лемма 1
$$\det(E + A(t)h + o(h)) = 1 + trA(t)h + o(h).$$

Доказательство Доказательство для $n = 2$ элементарно, для произвольного n аналогично. □

Вернемся к формуле Лиувилля-Остроградского.
$$W(t+h) = \det X(t+h) = (1 + \mathrm{tr}A(t)h + o(h)) \det X(t) = (1 + \mathrm{tr}A(t)h + o(h)) \det W(t),$$
$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} = \mathrm{tr}A(t)W(t) + o(1).$$
□