8 Лекция 8. Линейные неавтономные уравнения высших порядков: общая теория

8.1 Глобальная теорема о непрерывной зависимости

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \ (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1}$$

Теорема 1 *Пусть правая часть уравнения* (1) *непрерывна по* (t, x) *и липшицева по* x*. Пусть решение* $\varphi(t)$ *этого уравнения определено на отрезке* $[a, b]$ *(а значит, на более широком интервале). Тогда для любого* $t_0 \in [a, b]$ *существует окрестность* U *точки* $\varphi(t_0)$ *такая, что для любого* $x \in U$ *решение с начальным условием* (t_0, x) *определено на* $[a, b]$ *и непрерывно по* (t, x) *в* $[a, b] \times U$*.*

Эта теорема немедленно следует из локальной тноремы существования и единственности, которую мы сформулируем так:

Теорема 2 *В условиях теоремы 1 для любого* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *существует окрестность* I *точки* t_0 *и окрестность* U *точки* x_0 *такие, что для любого* $t_1 \in I$ *и* $x \in U$ *определено решение с начальным условием* $\varphi(t_1) = x$ *на интервале* I*, непрерывное по* t, x *на* $I \times U$*.*

Отсюда следует, что для любых $t_1, t_2 \in I$ определено отображение

$$g^{t_1,t_2} : x \mapsto \varphi(t_2, x),$$

где $\varphi(t_1, x) = x$.
Доказательство (доказательсво теоремы 1) Для каждой точки $(t, \varphi(t)$ возьмем окрестность $I_t \times U$ из теоремы 2. Отрезок $[a, b]$ будет покрыт окрестностями I_t. Выберем конечное подпокрытие, уменьшив окрестности так, чтобы каждая точка была покрыта одним или двумя интервалами. Для любых точек t_0, t из $[a, b]$ выберем точки $t_1, ..., t_n$ так, что в последовательности $t_0, t_1, ..., t_n, t$ любые две соседние точки принадлежат одному интервалу покрытия. Тогда композиция отображений

$$g^{t_n t} \circ g^{t_{n-1} t_n} \circ ... g^{t_1 t_2} \circ g^{t_0 t_1}$$

определена в некоторой окрестности U точки $\varphi(t_0)$ и переводит точку $x \in U$ в значение решения $\varphi(t, x)$, где $\varphi(t_0, x) = x$. Это отображение непрерывно. $\square$

8.2 Линейные уравнения высших порядков: сведение к системам

Линейное уравнение порядка n — это уравнение вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = 0, \tag{2}$$

где функции $a_j : I \to \mathbb{R}$ непрерывны на интервале I вещественной прямой. Уравнение (2) сводится к системе уравнений первого порядка по общей схеме. А именно, положим:

$$y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}, ...,\ y_n = x^{(n-1)}.$$

Тогда

$$\dot{y} = A(t)y \tag{3}$$

где матрица оператора A имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & ... & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Начальное условие для системы (4)

$$y(t_0) = y^0$$

соответствует следующему начальному условию для уравнения (2):

$$x(t_0) = y_1^0,\ \dot{x}(t_0) = y_2^0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = y_n^0. \tag{5}$$

Поэтому справедлива следующая теорема существования и единственности для линейных неавтономных уравнений, которая сразу следует из аналогичной теоремы для систем.

Теорема 3 *Для непрерывных функций $a_j \colon I \to \mathbb{R}$ уравнение* (2) *с начальным условием* (5) *имеет единственное решение, определенное на интервале I.*

8.3 Теорема об изоморфизме

Справедлива также следующая теорема об изоморфизме, которая сразу следует из аналогичной теоремы для систем.

Теорема 1 *Пространство решений уравнения* (2) *— n-мерное векторное пространство, изоморфное пространству начальных условий.*

Поэтому для того, чтобы решить уравнение (2), достаточно найти n линейно независимых его решений — фундаментальную систему решений. Остальные решения будут линейными комбинациями этих решений.

Следующие два раздела повторяют материал прошлой лекции для уравнений высших порядков вместо систем.

8.4 Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского

Определение 1 *Определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

называется определителем Вронского *для системы функций* x_j *и обозначается* $W(x_1, \dots, x_n)$.

В частности, определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (2) — это определитель Вронского соответствующей фундаментальной системы решений для системы уравнений (3), (4).

По формуле Лиувилля-Остроградского для систем, определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (2) $W(t) := W(x_1(t), \dots, x_n(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{W} = -a_{n-1}(t)W,$$

поскольку след матрицы (4) равен $-a_{n-1}(t)$. Это позволяет легко найти $W(t)$.

Выполнен следующий критерий линейной независимости решений уравнения (2).

Предложение 1 *Набор из* n *решений* $x_1, \dots, x_n$ *уравнения* (2) *является фундаментальной системой решений тогда и только тогда, когда определитель Вронского* $W(x_1, \dots, x_n)$ *не обращается в ноль хотя бы в одной точке. В этом случае определитель Вронского нигде не обращается в ноль.*

Доказательство Для линейно зависимых решений уравнения (2) определитель Вронского тождественно равен нулю, поскольку столбцы матрицы (6) линейно зависимы.

Если же определитель Вронского обращается в ноль в одной ьочке, то столцы соответствующей матрицы линейно зависимы. Тогда и соответствующие решения линейно зависимы по теореме об изоморфизме. □

8.5 Составление уравнения по решениям

Какие функции могут служить фундаментальной системой решений для линейного уравнения порядка n?

Ответ даёт следующее предложение.

Предложение 2 *Любые n функций $x_j\colon I \to \mathbb{R}$ класса C^n, для которых определитель Вронского $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ не равен нулю при всех $t \in I$, являются фундаментальной системой решений некоторого уравнения порядка n на отрезке I с непрерывными коэффициентами.*

Доказательство Искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{W(x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t))}{W(x_1(t), \ldots, x_n(t))} = 0.$$

Знаменатель нужен для того, чтобы старший коэффициент был равен 1. Уравнение получается разложением определителя в числителе по последнему столбцу. Функции $x_j(t)$ являются его решениями, потому что определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю. □

8.6 Линейные неоднородные уравнения: метод вариации постоянных

Линейным неоднородным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = b(t). \tag{7}$$

Если линейное однородное уравнение (2) решено, то соответствующее неоднородное уравнение (7) всегда можно решить методом вариации постоянных.

Соответствующая система линейных уравнений имеет вид:

$$\dot{y} = A(t)y + \tilde{b}(t), \tag{8}$$

где $A(t)$ — та же матрица, что и в (4), а $\tilde{b}(t) = (0, 0, \ldots, b(t))^t$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (2), и

$$X = \begin{pmatrix} x_1, \ldots & x_n \\ \vdots & \\ x_1^{(n-1)} \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

— соответствующая фундаментальная матрица решений системы (4). В соответствии с методом вариации постоянных для систем , общее решение системы (8) имеет вид $y = Xc(t)$, где вектор-функция $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))^t$ находится из уравнения

$$\dot{c} = X^{-1}\tilde{b}. \tag{9}$$

Учитывая связь между уравнением (7) и системой (8) получаем, что решение уравнения (7) имеет вид

$$x(t) = x_1(t)c_1(t) + \cdots + x_n(t)c_n(t). \tag{10}$$

Можно сказать, что мы взяли формулу для общего решения однородного уравнения $x = c_1x_1 + \ldots c_nx_n$ и *проварьировали постоянную*, заменив постоянный вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)^t$ переменным; отсюда происходит название метода.