ОДУ-2022. Семинар №4

(27/30 сентября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Ещё про вертикальные касательные

Это небольшое дополнение — студенты не вполне понимают, почему надо считать, что уравнение $xdy/dx = y$ имеет решениями полуоси на вертикальной прямой. Скорее всего, вы рассказывали нечто подобное, отвечая на вопросы студентов. Если, на Ваш взгляд, группа это уже усвоила, можно к этому не возвращаться. Если нет, стоит вставить это в разбор пятиминутки, решения других задач и т.п.

На лекциях доказывали такую теорему: интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

совпадают в области $F \neq 0$ с фазовыми кривыми автономной системы $\dot{x} = F(x,y)$, $\dot{y} = G(x,y)$. Говоря геометрически, в каждой точке прямая из поля направлений, задаваемого уравнением $dy/dx = G/F$, будет состоять из всех векторов, пропорциональных вектору скорости (F, G) для этой системы. Это соображение позволяет продолжить поле направлений и в те точки, где $F = 0$, $G \neq 0$.

Продолжив поле направлений (в этих точках оно будет вертикальным), можно рассмотреть его интегральные кривые. Определение остаётся прежним: в каждой точке она касается прямой поля, однако такая кривая уже не обязана быть графиком функции $y = y(x)$, а может быть любой гладкой кривой γ на плоскости. Кривая γ будет локально задаваться либо в виде $y = y(x)$ (и тогда удовлетворять уравнению $dy/dx = G/F$ — при $F \neq 0$), либо в виде $x = x(y)$. В последнем случае используем ту же теорему с заменой x на y: фазовые кривые системы $\dot{x} = F$, $\dot{y} = G$ совпадают в области $G \neq 0$ с интегральными кривыми уравнения $dx/dy = F(x,y)/G(x,y)$.

Итак, уравнение $dy/dx = \phi(x,y)$ естественно решать вместе с уравнением $dx/dy = 1/\phi(x,y)$, точнее, вместе с уравнением $dx/dy = \psi(x,y)$, где $\psi = 1/\phi$, там, где $\phi \neq 0$, а далее ψ продолжается по непрерывности куда возможно.

Линейные уравнения одной переменной

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

где функции P и Q непрерывны на некотором интервале (a,b). Поскольку функция $f(x,y) = Q(x) - P(x)y$ $(y' = f)$ непрерывна по x и y, а по y — непрерывно дифференцируема в открытой полосе $(a,b) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, то по теореме существования и единственности решения через любую точку этой полосы (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая.

Более того, как следует из дальнейших формул, решения будут определены на *всём* интервале (a,b). На самом деле, это общее свойство линейных уравнений и систем, оно будет доказано на лекции.

Однородное линейное уравнение

Если правая часть уравнения (1) $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным.*

$$y'(x) + P(x)y = 0$$

Очевидно, что множество его решений — линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$: если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения, то $\alpha y_1 + \beta y_2$ — тоже решения при $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Однородное уравнение — это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx,$$

при этом переходе к разделению переменных нужно учесть, что всегда существует тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Интегрируя обе части уравнения, получаем решение:

$$\ln\left|\frac{y(x)}{C}\right| = -\int_{x_0}^{x} P(u)\,du \quad \Rightarrow \quad y(x) = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(u)\,du\right).$$

Произвольная константа C фиксируется начальными данными: $C = y_0$ и решение существует для $\forall(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$.

Неоднородное линейное уравнение

Пусть теперь $Q(x) \not\equiv 0$. Множество решений неоднородного уравнения — аффинное пространство. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения неоднородного уравнения:

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x), \qquad y_2' + P(x)y_2 = Q(x),$$

то их разность $y(x) = y_1 - y_2$ — решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$y' + P(x)y = 0.$$

Или, говоря другими словами, *общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения дается суммой какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения.*

Для поиска частного решения неоднородного линейного уравнения используют *метод вариации постоянной.*

Найдем частное решение неоднородного линейного уравнения:

$$y'(x) + P(x)y = Q(x). \tag{2}$$

Процесс построения этого решения разбивается на два этапа.

1 шаг. Решаем *однородное* дифференциальное уравнение, отвечающее данному уравнению:

$$\tilde{y}' + P(x)\tilde{y} = 0.$$

Семейство общих решений этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C\exp(-F(x)), \quad F(x) = \int P(x)dx.$$

2 шаг. Решение неоднородного уравнения (2) ищем в специальном виде

$$y = C(x)\exp(-F(x)),$$

где $C(x)$ — неизвестная пока функция. Поскольку экспонента не обращается в нуль, здесь не возникает ограничений: любая функция $y(x)$ может быть записана в таком виде.

Для поиска $C(x)$ вычислим производную y'

$$y' = C'(x)e^{-F} + C(x)e^{-F}\,(-F') = C'(x)e^{-F} - C(x)e^{-F}P(x)$$

(здесь мы учли, что $F'(x) = P(x)$) и подставим результат в уравнение (2):

$$C'(x) = e^{F(x)}Q(x).$$

Полученное простейшее дифференциальное уравнение для $C(x)$ всегда имеет решение, так как правая часть — известные явно непрерывные функции переменной x:

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} e^{F(u)} Q(u) du + C_0 = \Phi(x) + C_0,$$

где C_0 — произвольная константа. В итоге получаем такой ответ:

$$y(x) = e^{-F(x)} \Phi(x) + C_0 e^{-F(x)}.$$

Здесь первое слагаемое есть частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2), а второе слагаемое — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Задача 4.1. Найти общее решение линейного уравнения:

$$y' + 2xy = xe^{x^2}.$$

Решение. Решаем однородное уравнение:

$$\tilde{y}' + 2x\tilde{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}(x) = Ce^{-x^2}.$$

Подставляем в неоднородное уравнение соответствующий анзац с заменой константы C на функцию $C(x)$ и решаем получившееся для нее дифференциальное уравнение:

$$C'(x) = xe^{2x^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C_0,$$

где C_0 — произвольная вещественная константа. Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения записывается в виде:

$$y(x) = C_0 e^{-x^2} + \frac{e^{x^2}}{4}.$$

◀

Задача 4.2. $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение. Уравнение можно разрешить относительно производной при $x \neq 0$. Найдем решение, например, при $x > 0$. В этой области можно поделить обе части уравнения на x и перейти к стандартному виду (1):

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3.$$

Здесь $P(x) = -2/x$, а $Q(x) = 2x^3$.

1 шаг. Решаем однородное уравнение:

$$\tilde{y}' - \frac{2}{x} \tilde{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = Cx^2.$$

2 шаг. Ищем решение неоднородного уравнения в виде $y(x) = C(x)x^2$:

$$\frac{d}{dx}(C(x)x^2) - \frac{2}{x} C(x)x^2 = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad C'(x)x^2 = 2x^3.$$

Так как мы рассматриваем область $x > 0$, то множитель x^2 можно сократить:

$$C'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C_0,$$

следовательно, $y(x) = x^2 C(x) = x^4 + C_0 x^2$ — общее решение неоднородного уравнения в области $x > 0$.

При $x < 0$ все аналогично:

$$y(x) = x^4 + \tilde{C}_0 x^2, \quad x < 0,$$

где константа $\tilde{C}_0$ независима от константы C_0.

Оба семейства интегральных кривых гладко продолжаются в особую точку $x = 0$, и поэтому любую интегральную кривую из области отрицательных x можно гладко “склеить” с любой интегральной кривой из области положительных x. Получившаяся кривая будет удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению на всей вещественной оси, но ее *нельзя* задать начальными данными вида $y(x_0) = y_0$, поскольку эти начальные данные фиксируют только правую (при $x_0 > 0$) или левую (при $x_0 < 0$) ветви кривой. Однозначность решения есть только в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$.

Замечание. Поменяв в исходном дифференциальном уравнении координатную карту

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y + x^4)}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{2(y + x^4)},$$

мы видим, что 2 луча

$$x = 0,\, y > 0 \quad \text{и} \quad x = 0,\, y < 0$$

также являются интегральными кривыми нашего уравнения. ◀

[