Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Мы определяли многочлен Татта графов как результат некоторой подстановки переменных в универсальный инвариант Татта. Его можно определить и следующим образом. Это мультипликативный инвариант графов, для которого $T_{X_n}(x,y) = y^n$ на графе с одной вершиной и n петлями, такой, что

$$T_G(x,y) = \begin{cases} T_{G'_e}(x,y) + T_{G''_e}(x,y) & \text{если e ребро, не являющееся мостом} \\ xT_{G''_e}(x,y) & \text{если e — мост} \end{cases}$$

Мостом в графе называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности в графе.

Мы определяли многочлен Татта графов как результат некоторой подстановки переменных в универсальный инвариант Татта. Его можно определить и следующим образом. Это мультипликативный инвариант графов, для которого $T_{X_n}(x,y)=y^n$ на графе с одной вершиной и n петлями, такой, что

$$T_G(x,y)=\begin{cases} T_{G'_e}(x,y)+T_{G''_e}(x,y) & \text{если e ребро, не являющееся мостом} \\ xT_{G''_e}(x,y) & \text{если e — мост} \end{cases}$$

Мостом в графе называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности в графе.

Тем самым, переменная y в многочлене Татта "отвечает" за петли, переменная x — за звенья.

Мы определяли многочлен Татта графов как результат некоторой подстановки переменных в универсальный инвариант Татта. Его можно определить и следующим образом. Это мультипликативный инвариант графов, для которого $T_{X_n}(x,y)=y^n$ на графе с одной вершиной и n петлями, такой, что

$$T_G(x,y)=\begin{cases} T_{G'_e}(x,y)+T_{G''_e}(x,y) & \text{если e ребро, не являющееся мостом} \\ xT_{G''_e}(x,y) & \text{если e — мост}\end{cases}$$

Мостом в графе называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности в графе.

Тем самым, переменная y в многочлене Татта "отвечает" за петли, переменная x — за звенья.

Задача. Пусть граф G получен отождествлением одной вершины связного графа G_1 с вершиной связного графа G_2. Докажите, что $T_G=T_{G_1}T_{G_2}$.

Инварианты графов на поверхностях также могут удовлетворять соотношениям удаления-стягивания.

Definition

Многочленом Боллобаша–Риордана $B_\Gamma(x,y,z)$ связного вложенного графа Γ называется инвариант вложенных графов, удовлетворяющих соотношению удаления-стягивания

$$B_\Gamma(x,y,z) = \begin{cases} B_{\Gamma'_e}(x,y,z) + B_{\Gamma''_e}(x,y,z) & \text{если e ребро, не являющееся мостом} \\ xB_{\Gamma''_e}(x,y,z) & \text{если e — мост} \end{cases}$$

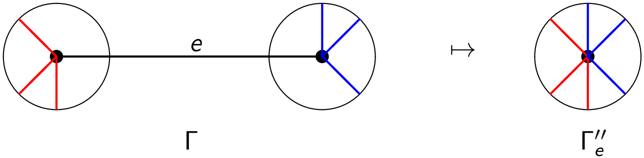
Инварианты графов на поверхностях также могут удовлетворять соотношениям удаления-стягивания.

Definition

Многочленом Боллобаша–Риордана $B_\Gamma(x,y,z)$ связного вложенного графа Γ называется инвариант вложенных графов, удовлетворяющих соотношению удаления-стягивания

$$B_\Gamma(x,y,z) = \begin{cases} B_{\Gamma'_e}(x,y,z) + B_{\Gamma''_e}(x,y,z) & \text{если e ребро, не являющееся мостом} \\ xB_{\Gamma''_e}(x,y,z) & \text{если e — мост} \end{cases}$$

Требуется объяснить, как задается циклический порядок полуребер в вершине графа Γ''_e, полученной в результате стягивания ребра e:



Для завершения определения многочлена Боллобаша–Риордана необходимо задать начальные условия рекурсии.

Definition

Хордовой диаграммой называется вложенный граф с одной вершиной.

Значение многочлена Боллобаша–Риордана на хордовой диаграмме задается равенством

$$B_D(x,y,z) = \sum_{U\subset E(D)} y^{|U|} z^{1-\mathrm{bc}(D|_U)+|U|},$$

где суммирование происходит по всем подмножествам множества ребер (хорд) $E(D)$ хордовой диаграммы D, через $D|_U$ обозначена хордовая поддиаграмма в D, образованная подмножеством хорд U, а через $\mathrm{bc}(D)$ — количество компонент связности границы (т.е., количество граней) вложенного графа D.

Например, для хордовой диаграммы с двумя пересекающимися хордами имеем

$$B_D(x, y, z) = 1 + 2y + y^2z^2.$$

Например, для хордовой диаграммы с двумя пересекающимися хордами имеем

$$B_D(x, y, z) = 1 + 2y + y^2 z^2.$$

Действительно, степени переменной y в мономах многочлена B_D равны количеству хорд в соответствующем подмножестве множества хорд $E(D)$. Степени переменной z вычисляются следующим образом.

Для хордовой диаграммы с одной хордой количество компонент связности границы равно 2, поэтому показатель степени переменной z во вкладе такой диаграммы равен $1 - 2 + 1 = 0$. Для хордовой диаграммы с двумя пересекающимися хордами количество компонент связности границы равно 1, поэтому показатель степени переменной z в ее вкладе равен $1 - 1 + 2 = 2$.

Например, для хордовой диаграммы с двумя пересекающимися хордами имеем

$$B_D(x,y,z) = 1 + 2y + y^2z^2.$$

Действительно, степени переменной y в мономах многочлена B_D равны количеству хорд в соответствующем подмножестве множества хорд $E(D)$. Степени переменной z вычисляются следующим образом.
Для хордовой диаграммы с одной хордой количество компонент связности границы равно 2, поэтому показатель степени переменной z во вкладе такой диаграммы равен $1-2+1=0$. Для хордовой диаграммы с двумя пересекающимися хордами количество компонент связности границы равно 1, поэтому показатель степени переменной z в ее вкладе равен $1-1+2=2$.

Ниже нам будет удобнее рассматривать несколько измененный многочлен Боллобаша–Риордана. А именно, мы положим $\widetilde{B}_\Gamma(x,y,z) = B_\Gamma(x,y-1,z)$.

Каждому вложенному графу Γ можно сопоставить двойственный вложенный граф Γ^*. Если Γ задан как след границы при склеивании набора правильных многоугольников по некоторой схеме, то двойственный к нему граф Γ^* является результатом склейки звездочек, образованных центрами многоугольников и полуребрами, соединяющими эти центры с серединами сторон многоугольников, по той же самой схеме.

Лекция 4. Двойственность графов на поверхностях

Каждому вложенному графу Γ можно сопоставить двойственный вложенный граф Γ^*. Если Γ задан как след границы при склеивании набора правильных многоугольников по некоторой схеме, то двойственный к нему граф Γ^* является результатом склейки звездочек, образованных центрами многоугольников и полуребрами, соединяющими эти центры с серединами сторон многоугольников, по той же самой схеме.

Его вершины взаимно-однозначно соответствуют граням вложенного графа Γ, его грани — взаимно-однозначно соответствуют вершинам вложенного графа Γ, и ребра вложенных графов Γ и Γ^* находятся во взаимно-однозначном соответсвии между собой.

Каждому вложенному графу Γ можно сопоставить двойственный вложенный граф Γ^*. Если Γ задан как след границы при склеивании набора правильных многоугольников по некоторой схеме, то двойственный к нему граф Γ^* является результатом склейки звездочек, образованных центрами многоугольников и полуребрами, соединяющими эти центры с серединами сторон многоугольников, по той же самой схеме.

Его вершины взаимно-однозначно соответствуют граням вложенного графа Γ, его грани — взаимно-однозначно соответствуют вершинам вложенного графа Γ, и ребра вложенных графов Γ и Γ^* находятся во взаимно-однозначном соответсвии между собой.

При задании вложенного графа тройкой перестановок (α, σ, ϕ) двойственный к нему вложенный граф задается тройкой перестановок (α, ϕ, σ), действующих на том же самом множестве полуребер.

Theorem

Пусть Γ *— плоский вложенный граф. Тогда многочлен* $\widetilde{B}_\Gamma(x,y,z)$ *не зависит от* z *и* $\widetilde{B}_\Gamma(x,y,z)=\widetilde{B}_{\Gamma^*}(y,x,z)$.

Доказательство.

Операцию двойственности можно осуществить на отдельном ребре и на любом подмножестве ребер.

Лекция 4. Частичная двойственность

Операцию двойственности можно осуществить на отдельном ребре и на любом подмножестве ребер.

Пусть e — звено во вложенном графе Γ. Вложенный граф $\Gamma * \{e\}$ получается из Γ стягиванием ребра e и заменой его петлей e^*, началом и концом которой является вершина, образованная склейкой концов звена e, с сохранением относительных циклических порядков входящих в них полуребер.

Операцию двойственности можно осуществить на отдельном ребре и на любом подмножестве ребер.

Пусть e — звено во вложенном графе Γ. Вложенный граф $\Gamma * \{e\}$ получается из Γ стягиванием ребра e и заменой его петлей e^*, началом и концом которой является вершина, образованная склейкой концов звена e, с сохранением относительных циклических порядков входящих в них полуребер.

Напротив, если e — петля в Γ, то двойственность по ней приводит к расщеплению вершины, которой эта петля инцидентна; эта вершина превращается в две вершины, соединенные ребром e^*. Остальные полуребра, инцидентные этой вершине, сохраняют относительный порядок между собой и по отношению к полуребрам ребра e, распределяясь соответственно по двум новым вершинам.

Операцию двойственности можно осуществить на отдельном ребре и на любом подмножестве ребер.

Пусть e — звено во вложенном графе Γ. Вложенный граф $\Gamma * \{e\}$ получается из Γ стягиванием ребра e и заменой его петлей e^*, началом и концом которой является вершина, образованная склейкой концов звена e, с сохранением относительных циклических порядков входящих в них полуребер.

Напротив, если e — петля в Γ, то двойственность по ней приводит к расщеплению вершины, которой эта петля инцидентна; эта вершина превращается в две вершины, соединенные ребром e^*. Остальные полуребра, инцидентные этой вершине, сохраняют относительный порядок между собой и по отношению к полуребрам ребра e, распределяясь соответственно по двум новым вершинам.

Частичная двойственность по ребру действительно является двойственностью: $(\Gamma * \{e\}) * \{e^*\} = \Gamma$.

Лекция 4. Частичная двойственность

Theorem

Частичная двойственность по различным ребрам независима:
$\Gamma * \{e_1\} * \{e_2\} = \Gamma * \{e_2\} * \{e_1\}$ *для любых* $e_1, e_2 \in V(\Gamma)$.

Corollary

Частичную двойственность можно осуществлять про произвольному набору ребер $E \subset V(\Gamma)$*: вложенный граф* $\Gamma * E'$ *корректно определен для любого подмножества* $E' \subset V(\Gamma)$*. Вложенный граф* $\Gamma * V(\Gamma)$ *совпадает с двойственным вложенным графом* Γ^*.

Theorem

Справедливо равенство

$$\Gamma''_e = (\Gamma * \{e\})'_{e^*}$$

— стягивание звена e во вложенном графе Γ *яовпадает с композицией двойственности по этому ребру и последующего удаления двойственному к нему ребра* e^*.

Theorem

Справедливо равенство

$$\Gamma''_e = (\Gamma * \{e\})'_{e^*}$$

— стягивание звена e во вложенном графе Γ *яовпадает с композицией двойственности по этому ребру и последующего удаления двойственному к нему ребра* e^*.

Семинары 4. Задачи

- Разбейте правильные многогранники на пары двойственных.
- Опишите многогранник, двойственный звездчатому икосаэдру.
- Какой вложенный граф является двойственным стандартному вложению графа Петерсона в проективную плоскость?

Семинары 4. Задачи

- Пусть D — хордовая диаграмма, $G = g(D)$ — ее граф пересечения. Докажите, что число компонент связности границы хордовой диаграммы D равно увеличенному на 1 корангу матрицы смежности $A(g(D))$ рассматриваемой над полем из 2 элементов.

Семинары 4. Задачи

- Пусть D — хордовая диаграмма, $G = g(D)$ — ее граф пересечения. Докажите, что число компонент связности границы хордовой диаграммы D равно увеличенному на 1 корангу матрицы смежности $A(g(D))$ рассматриваемой над полем из 2 элементов.
- Докажите, что для *плоского* вложенного графа (т.е. для графа, вложенного в сферу) многочлен Боллобаша–Риордана совпадает с многочленом Татта. В частности, многочлен Боллобаша–Риордана не зависит от вложения *планарного* графа (т.е., графа, *допускающего* вложение в сферу) в сферу.
- Найдите количество попарно неизоморфных вложений а) графа K_4; б) триангуляции 5-угольника; в) графа K_5; г) остова куба в ориентируемые поверхности различного рода.
- Вычислите многочлен Боллобаша–Риордана для каждого из перечисленных выше вложенных графов.

Семинары 4. Задачи

- Вычислите многочлен Боллобаша–Риордана для всех хордовых диаграмм с 4 хордами, граф пересечений которых связен.
- Допускает ли триангуляция 5-угольника вложение в поверхность рода 2 (крендель)?

- Вычислите многочлен Боллобаша–Риордана для всех хордовых диаграмм с 4 хордами, граф пересечений которых связен.
- Допускает ли триангуляция 5-угольника вложение в поверхность рода 2 (крендель)?
-

Семинары 4. Задачи

-

-
-
-