ОДУ-2022. Семинар №5

(4/7 октября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

На этом семинаре нужно разобрать материал про монодромию линейного уравнения (был в семинаре №4, для удобства дублирую здесь) и однородные уравнения. Уравнения Бернулли — дополнительный сюжет: разбирайте его только если будет достаточно времени и не будет вопросов от студентов.

Линейные уравнения с периодической правой частью. Монодромия

Рассмотрим уравнение с периодической по времени правой частью:

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad f(x,t+T) \equiv f(x,t).$$

Такие уравнения могут описывать процессы, происходящие в периодически меняющихся условиях (например, в биологии параметры могут меняться с суточным или годовым ритмом).

Как будут себя вести их решения? Мы сегодня ограничимся случаем линейного уравнения

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t).$$

где функции P и Q имеют период T. Как мы видели, решения этого уравнения определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Более того, они образуют аффинное пространство, а любое отображение вида $\mathbf{e}_{t_0}\colon x \mapsto x(t_0)$ будет изоморфизмом этого пространства на аффинную прямую $\mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $\Phi = \mathbf{e}_T \circ \mathbf{e}_0^{-1}$: чтобы найти $\Phi(y)$, нужно взять решение уравнения с начальным условием $x(0) = y$ и вычислить $x(T)$. Оно называется *отображением монодромии*. Как следует из сказанного, это аффинное отображение прямой на себя.

Отображение монодромии полезно, например, при анализе поведения решений при $t \to \infty$, поскольку $x(nT) = \Phi^n(x(0))$ (почему?).

Зададимся следующими вопросами: есть ли у нашего уравнения периодическое решение? как себя ведут другие решения?

Из вышеприведённых формул следует, что отображение монодромии имеет вид $\Phi(y) = Ay+B$, где

$$A = \exp\left(\int_0^T P(t)\,dt\right).$$

В частности, $A > 0$. Тогда возможны три случая:

- $A > 1$: Φ имеет неподвижную точку $z = B/(1-A)$, для других точек $\Phi^n(y)$ удаляются от z.
- $0 < A < 1$: Φ имеет неподвижную точку $z = B/(1-A)$, для других точек $\Phi^n(y)$ стремятся к z.
- $A = 1$: неподвижных точек либо нет совсем (если $B \neq 0$ — тогда $\Phi^n(y)$ стремятся к ∞ для любого y), либо все точки неподвижны ($B = 0$).

Переводя эту классификацию на язык решений уравнения, мы получим, что при $A \neq 1$ есть одно периодическое решение (а остальные решения к нему приближаются или от него удаляются), а при $A = 1$ либо периодических решений вовсе нет, либо все они таковы.

Задача 5.1. При каких c уравнение

$$\dot{x} = (\sin t - c)x + \cos t$$

имеет хотя бы одно периодическое решение?

Решение. $\ln A = \int_0^{2\pi} (\sin t - c)\, dt$. Интеграл в правой части равен 0 только при $c = 0$ — значит, $A \neq 1$ при $c \neq 0$, и периодическое решение существует и единственно. Остался случай $c = 0$. Пользуясь методом вариации постоянной, находим, что $x(t) = C(t)e^{-\cos t}$,

$$B = C(2\pi) - C(0) = \int_0^{2\pi} \cos t e^{\cos t}\, dt.$$

Убедимся, что $B > 0$ (так что преобразование монодромии неподвижных точек не имеет, а все решения нашего ДУ стремятся к $+\infty$ при $t \to +\infty$. Для этого сначала сделаем замену переменной $u = 2\pi - t$ на $[\pi, 2\pi]$, и получим, что $B = 2\int_0^{\pi} \cos t e^{\cos t}\, dt$, а теперь заменой $v = \pi - t$ на $[\pi/2, \pi]$ придём к

$$B = 2\int_0^{\pi/2} \cos t \big(e^{\cos t} - e^{-\cos t}\big)\, dt > 0.$$

Обратите внимание студентов, что для ответа на вопрос о знаке B интеграл мы *не считали явно* (тем более, что он и не берётся). ◀

Однородные уравнения

Рассмотрим уравнение вида

$$dy/dx = f(x, y),$$

правая часть разрешенного которого — однородная функция нулевого порядка, то есть

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) \quad \forall\, \alpha \neq 0.$$

Тогда, взяв $\alpha = 1/x$, получаем: $f(x, y) = f(1, y/x) \equiv \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ (в области $x \neq 0$) или $f = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ (в области $y \neq 0$).

Итак, исходное уравнение переписывается в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Уравнения с подобной правой частью называются *однородными.*

Замечание. Тут возможна некоторая путаница в терминологии, поскольку термин *однородное уравнение* применяется, как мы видели в прошлый раз, также в теории линейных уравнений.

Однородное уравнение (1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой искомой функции $y(x)$ на функцию $u(x)$ согласно формуле:

$$\frac{y(x)}{x} = u(x).$$

Далее нужно выразить производную y' в терминах новой переменной:

$$y(x) = xu(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u + xu'$$

и подставить в исходное уравнение:

$$u + xu' = \phi(u), \quad xu' = \phi(u) - u \equiv F(u)$$

— переменные в уравнении для $u(x)$ разделились.

Замечание. У однородного уравнения точка $(0, 0)$ всегда особая. Кроме того, уравнение (1) инвариантно относительно однородного растяжения:

$$y \to \tilde{y} = \lambda y, \quad x \to \tilde{x} = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}/0.$$

Поэтому система интегральных кривых однородного уравнения тоже обладает этой симметрией. В частности, при $\lambda = -1$ получаем поворот на $180°$ относительно начала координат и картина интегральных кривых инвариантна относительно такого поворота.

Задача 5.2.

$$x\,\frac{dy}{dx} = x + y.$$

Решение. В областях $x > 0$ и $x < 0$ разрешаем уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Правая часть непрерывна по совокупности аргументов в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$, и, кроме того, частная производная по y существует и непрерывна в любой точке этих полуплоскостей. Таким образом, в силу теоремы существования и единственности решения, через любую точку (x_0, y_0) при $x_0 \neq 0$ проходит единственная интегральная кривая нашего уравнения.

Для исследования поведения решений вблизи вертикальной прямой $x = 0$ перейдем в другую карту (то есть, будем искать зависимость $x(y)$):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{x+y}.$$

Итак, мы видим, что на прямой $x = 0$ существуют две интегральные кривые нашего уравнения — это лучи $\{x = 0, y > 0\}$ и $\{x = 0, y < 0\}$. Точка начала координат $(0, 0)$ — особая, в ней нет поля направлений и уравнение не определено.

Заметим также, что на прямых $y = \alpha x$ (или $x = \beta\, y$) наше поле направлений постоянно:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \alpha = \mathrm{const}.$$

Поскольку производная равна тангенсу угла наклона касательной в данной точке, то получаем, что прямые $y = \alpha x$ — изоклины, то есть интегральные кривые пересекают их под одним и тем же углом. На прямой $y = -x$ все интегральные кривые имеют локальный экстремум:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=-x} = 0.$$

Найдем решения в области $x > 0$, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности решения. Выполняя подстановку $y = xu$, получаем последовательность равенств:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad u + xu' = 1 + u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \ln\left|\frac{x}{C}\right|.$$

Поскольку $u = y/x$, то $y(x) = x \ln|x/C|$ при $x > 0$.

В области $x < 0$ получается семейство интегральных кривых такого же вида, но со своим независимым параметром $\tilde{C}$.

Кроме того, лучи $x = 0, y > 0$ и $x = 0, y < 0$ — тоже интегральные кривые. Начало координат — особая точка.

Заметим, что достаточно найти решения только в области $x > 0$ или в области $x < 0$. Семейство интегральных кривых во второй области получится поворотом плоскости на $180°$. ◀

∗Уравнения Бернулли

Эту тему разбирайте только если останется время.

Существует важный класс нелинейных дифференциальных уравнений, котрые сводятся к линейным степенной подстановкой. Это уравнения Бернулли, которые имеют следующий общий вид:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},$$

где вещественная константа $\alpha \neq 0, 1$. Уравнение Бернулли сводится к линейному степенной заменой искомой функции.

Прежде всего отметим, что при положительных значениях $\alpha > 0$ всегда есть тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Предположим теперь, что $y > 0$, и попробуем подобрать такую замену: $z = y^\beta$.

$$\frac{dz}{dx} = \beta y^{\beta-1}\frac{dy}{dx} = -\beta P(x)y^\beta + \beta Q(x)y^{\alpha+\beta-1} = -\beta P(x)z + \beta Q(x)z^{(\alpha+\beta-1)/\beta}.$$

Таким образом, замена $z = y^{1-\alpha}$ приводит уравнение к линейному.

Для отрицательных значений y (если $\alpha \in \mathbb{Z}$) работает та же подстановка. Если α чётно, то $y < 0$ отвечают значения $z < 0$. Если же α нечётно, то дифференциальное уравнение решается по-прежнему при $z > 0$, но при обратной замене берётся отрицательное решение уравнения $z = y^{1-\alpha}$: $y = -z^{1/(1-\alpha)}$.

Задача 5.3. $\dfrac{dy}{dx} + 2y + x^5\, y^3 = 0.$

Решение. Уравнение имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Для $y \neq 0$:

$$\frac{1}{y^3}\,\frac{dy}{dx} + \frac{2}{y^2} + x^5 = 0.$$

Вводим новую функцию $z = y^{-2}$, находим производную $z' = -2y^{-3}y'$ и приходим к уравнению на $z(x)$:

$$-\frac{1}{2}\,z' + 2z + x^5 = 0.$$

Это линейное неоднородное уравнение, которое можно решить методом вариации постоянной, разобранным выше. ◀

Задача 5.4. $\dfrac{dy}{dx}\,(2x^2 y\ln y - x) = y, \quad y > 0.$

Решение. Зависимость от y не является степенной, поэтому для $y(x)$ данное уравнение не является уравнением Бернулли. Будем трактовать его как уравнение на $x(y)$, считая y независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad \Rightarrow \quad 2x^2\, y\ln y - x = y\,\frac{dx}{dy}.$$

На функцию $x(y)$ получается уравнение Бернулли. Отметим, что $x \equiv 0$ — решение. Далее делим на x^2 и вводим новую функцию $z(y)$:

$$z(y) = \frac{1}{x(y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = -2\ln y.$$

Это линейное уравнение на $z(y)$, которое будем решать в областях: $y > 0$ и $z > 0$ или $z < 0$. Решение однородного уравнения: $\tilde{z}(y) = Cy$. Следовательно, анзац для неоднородного уравнения $z(y) = C(y)y$:

$$C'(y)y = 2\ln y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \ln^2 y + C_0.$$

В итоге получаем ответ: $z(y) = y(\ln^2 y + C_0)$. Учитывая связь $z(y)$ и $x(y)$, получаем семейство интегральных кривых исходного уравнения в следующем виде:

$$xy(\ln^2 y + C_0) = 1.$$

◀