Семинар 6
Метрика

В вещественном евклидовом пространстве V выбран ортонормированный базис e_k, $k = 1, \ldots, n$. В алгебре Грассмана введем евклидову метрику, объявив стандартный базис e_I ортонормированным базисом.

1. Вычислить длину вектора $1 + 2e_1 + 3e_2 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$.

2. Найти скалярное произведение векторов $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ и $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$, если $v_1 = 2e_1 - e_2 + 4e_4$, $v_2 = e_1 - e_2 - e_3$, $v_3 = -e_1 + 3e_3 + 5e_4$, $w_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $w_2 = e_1 - e_3 + e_4$, $w_3 = -e_1 + e_2 + e_4$.

3. Пусть A – ортогональный оператор в пространстве V. Доказать, что $\wedge A$ ортогональный оператор в евклидовом пространстве алгебры Грассмана $\wedge V$.

4^*. Используя результат задачи 3, попробуйте доказать, что сумма квадратов всех миноров порядка k, лежащих в ортогональной матрице в любых ее k строках (столбцах), равна 1.

Ориентация и ориентированные объемы

В пространстве W выбран базис q_i, а в двойственном пространстве W^* – двойственный базис p_j.

5. В вещественном пространстве W размерности $2n$ введем ориентацию с помощью n-той степени косой 2-формы $p_1 \wedge p_2 + p_3 \wedge p_4 + \ldots + p_{2n-1} \wedge p_{2n}$. Совпадают ли ориентации базисов
$q_1, \ldots, q_{2n}$ и $q_1, -q_2, q_3, -q_4, \ldots, q_{2n-1}, -q_{2n}$?

6. В условиях предыдущей задачи $n = 2$. Найти отношение объема Коробочки, построенной на векторах $v_1 = 2q_1 - q_2 + 4q_4$, $v_2 = q_1 - q_2 - q_3 + q_4$, $v_3 = -q_1 + 3q_3 + 5q_4$, $v_4 = q_1 + q_2 - q_3 + q_4$, к объему Коробочки, построенной на векторах $q_1 + q_2$, $q_2 + q_3$, $q_3 + q_4$, q_4.

7. Используя объемы (или алгебру Грассмана), докажите теорему об определителе произведения матриц.

8. Пусть (V, ω) – четырехмерное симплектическое пространство (а что это такое?). Определим на декартовом произведении двух пространств $\wedge^2 V$ функцию ϕ по формуле $\phi(\tau_1, \tau_2) = \frac{\tau_1 \wedge \tau_2}{\omega \wedge \omega}$.

Доказать, что ϕ задает невырожденную симметричную билинейную форму на пространстве $\wedge^2 V$ и найти ее сигнатуру.