Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать мне на почту artamkin@mail.ru , ДО УТРА СРЕДЫ перед следующим занятием.

Задания с 3 занятия.

(1) Пусть R — произвольное (коммутативное, ассоциативное и с 1) кольцо, I и J — два идеала в нем. Мы обсуждали отображение $\varphi : R \to R/I \times R/J$ и выяснили (это очевидно), что $\operatorname{Ker}\varphi = I \cap J$. Осталось доказать, что сюръективность φ равносильна тому, что $I + J = (1)$.

(2) Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, и рациональная функция $\varphi \in \mathbf{k}(X)$ регулярна во всех точках многообразия X. Докажите, что $\varphi \in \mathbf{k}[X]$.

(3) Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, $f \in \mathbf{k}[X]$, $U_f = X \setminus V(f)$ — главное открытое множество. Докажите, что кольцо функций, регулярных во всех точках U_f (мы будем обозначать его $\mathbf{k}[U_f]$), это множество рациональных функций вида $\frac{g}{f^m}$, $g \in \mathbf{k}[X]$.

(4) Пусть в условиях предыдущей задачи X является аффинным многообразием в $\mathbb{A}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, рассмотрим также $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n, t)$ и проекцию $p : \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n$, $p(x_1, \ldots, x_n, t) = (x_1, \ldots, x_n)$, и аффинное многообразие $Y = p^{-1}(X) \cap V(1 - tF(x_1, \ldots, x_n)) \subset \mathbb{A}^{n+1}$, где F это какой-нибудь многочлен, ограничение которого на X дает f. Обозначим ограничение проектирования p на Y через $q : Y \to X$. Покажите, что гомоморфизм $q* : \mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[Y]$ инъективен и $\mathbf{k}[Y]$ изоморфно $\mathbf{k}[U_f]$.

(5) Остаются части (c) и (d) задачи 1 из прошлого списка.