

## 9 Лекция 9. Решение линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

Этот текст содержит материал лекции 9 и часть лекции 10.

### 9.1 Операторная символика

Мы переходим к случаю, когда линейное уравнение порядка  $n$  удаётся полностью решить — случаю постоянных коэффициентов.

Рассмотрим уравнение вида

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0, \quad (1)$$

где  $a_j$  — константы. Любое решение уравнения — линейная комбинация фундаментальной системы решений.

Мы будем искать решения уравнения (1) в виде  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Для начала введем *операторную символику*.

Пусть  $p := \frac{d}{dt}$  — отображение пространства функций в себя, которое определено для дифференцируемых функций и каждой функции ставит в соответствие её производную:  $pf = f' = \dot{f}$ . Отображение, область определения и область значений которого — некоторые пространства функций, часто называют *оператором*. Пусть  $p^n$  — это оператор  $p$ , применённый  $n$  раз:  $p^n f = f^{(n)}$ . Для любого многочлена  $M(z) = m_n z^n + m_{n-1} z^{n-1} + \dots + m_0$  с вещественными коэффициентами положим

$$M(p) := m_n p^n + m_{n-1} p^{n-1} + \dots + m_0.$$

Эта формула определяет *дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами*  $M(p)$ . Запись вида  $M(p)x(t)$  означает результат применения дифференциального оператора  $M(p)$  к функции  $x(t)$ .

Заметим, что уравнение (1) можно записать в виде  $L(p)x(t) = 0$ , где  $L(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ .

**Определение 1** Многочлен  $L(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  называется характеристическим многочленом уравнения (1).

Выясним, как оператор  $M(p)$  действует на экспоненту  $e^{\lambda t}$ .

**Лемма 1** Для любого многочлена  $M$  выполнено равенство

$$M(p)e^{\lambda t} = M(\lambda)e^{\lambda t}. \quad (2)$$

**Доказательство** Сначала проверим это равенство для всех одночленов  $M(p) = p^k$ :

$$p^k e^{\lambda t} = (e^{\lambda t})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t} = M(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Так как обе части равенства (2) линейны по  $M$ , утверждение выполнено и для любой линейной комбинации одночленов, то есть для любого многочлена.  $\square$

В частности, если  $\lambda$  — корень характеристического многочлена  $L(z)$ , то  $L(p)e^{\lambda t} = 0$ . Но условие  $L(p)x(t) = 0$  — это и есть уравнение (1)! Значит, функция  $x(t) = e^{\lambda t}$  является решением уравнения (1).

## 9.2 ФСР: простейший случай

Это соображение позволяет найти фундаментальную систему решений в случае, когда характеристический многочлен  $L(z)$  имеет  $n$  различных вещественных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

**Предложение 1** Пусть характеристический многочлен  $L(z)$  имеет  $n$  различных вещественных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Тогда система решений  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  будет фундаментальной для уравнения (1).

**Доказательство** Из предыдущей леммы следует, что функции  $e^{\lambda_j t}$  будут решениями уравнения (1). Осталось проверить, что они линейно независимы.

**Лемма 2** Если числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  различны, то функции  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство** [Доказательство с помощью метода “деления с дифференцированием”.]

Утверждение докажем индукцией по  $n$ . База  $n = 1$  очевидна. Пусть утверждение верно для любого набора из  $n - 1$  различных чисел  $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ . Пусть

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \equiv 0. \quad (3)$$

Разделим это равенство на  $e^{\lambda_n t}$  и продифференцируем. Получим:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) e^{(\lambda_k - \lambda_n)t} \equiv 0$$

В силу предположения индукции,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Тогда из равенства (3) следует, что  $\alpha_n = 0$ . Итак, из равенства (3) следует, что все числа  $\alpha_j$  нулевые. Значит, функции  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ .  $\square$

$\square$

### 9.3 Случай попарно различных комплексных корней характеристического многочлена

В этом случае нам придется работать с комплексно-значными функциями. Для этого понадобятся следующие определения.

**Определение 2** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  — комплексно-значная функция. Производной функции  $f$  называется функция

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

(если такой предел существует).

**Определение 3** Комплексная экспонента — это сумма комплексного степенного ряда  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

Для комплексных экспонент верна знаменитая формула Эйлера:

$$e^{(x+iy)} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Её геометрическое доказательство будет рассказано позже.

Эти определения позволяют разобраться со случаем, когда характеристический многочлен  $L(z)$  имеет  $n$  различных комплексных корней.

**Предложение 2** Пусть характеристический многочлен  $L(z)$  имеет  $n$  различных комплексных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Тогда комплексно-значные функции  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  являются независимыми над  $\mathbb{C}$  решениями уравнения (1).

Определение линейной независимости функций над  $\mathbb{C}$  полностью аналогично вещественному.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 1: функции  $e^{\lambda t}$  удовлетворяют дифференциальному уравнению (1), если производные считать в смысле предыдущего определения, и оказываются линейно независимыми над  $\mathbb{C}$ . Но нас интересуют вещественные фундаментальные системы решений, поэтому система решений  $e^{\lambda t}$  будет заменена вещественной.

Заметим, что многочлен  $L(z)$  имеет вещественные коэффициенты. Значит, если  $L(\lambda) = 0$ , то  $L(\bar{\lambda}) = \overline{L(\lambda)} = 0$ . Поэтому все невещественные корни многочлена  $L$  разбиваются на пары комплексно сопряжённых. То есть его корни имеют следующий вид:

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^l \cup \{\mu_k \pm i\nu_k\}_{k=1}^r,$$

где  $\mu_k, \nu_k$  и  $\lambda_k$  вещественны и  $2r + l = n$ .

**Предложение 3** Пусть характеристический многочлен уравнения (1) имеет различные корни:  $l$  вещественных,  $\lambda_k, 1 \leq k \leq l$ , и  $r$  пар комплексно сопряженных:  $\mu_s \pm i\nu_s, 1 \leq s \leq r$ ;  $n = l + 2r$ . Тогда функции

$$e^{\lambda_k t}, k \leq l \quad e^{\mu_s t} \cos \nu_s t, \quad e^{\mu_s t} \sin \nu_s t, s \leq r \quad (4)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) над  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство** Предложение 2 показывает, что функции

$$e^{\lambda_k t}, k \leq l, \quad e^{(\mu_s \pm i\nu_s)t}, s \leq r, \quad (5)$$

являются линейно независимыми (над  $\mathbb{C}$ ) решениями уравнения (1). Так как этот набор состоит из  $n$  функций, эти функции образуют базис в  $n$ -мерном пространстве решений уравнения (1), то есть фундаментальную систему решений. По формуле Эйлера,

$$e^{\mu_s t} \cos \nu_s t = \frac{1}{2}(e^{(\mu_s + i\nu_s)t} + e^{(\mu_s - i\nu_s)t}), \quad e^{\mu_s t} \sin \nu_s t = \frac{1}{2i}(e^{(\mu_s + i\nu_s)t} - e^{(\mu_s - i\nu_s)t}). \quad (6)$$

Поэтому система из  $n$  функций (4) отличается от базиса (5) невырожденной линейной заменой. Значит, набор вещественных функций (4) тоже является базисом в пространстве решений уравнения (1), то есть фундаментальной системой решений.  $\square$

**Пример 1** Возьмём уравнение  $\ddot{x} = 0$ . У его характеристического многочлена  $z^2$  есть кратный корень 0. Решением уравнения является, кроме функции  $\varphi_1(t) = e^{0 \cdot t} \equiv 1$ , функция  $\varphi_2(t) = te^{0 \cdot t} = t$ .

## 9.4 Формула сдвига

**Лемма 3 (Формула сдвига)** Для любого многочлена  $L$  и для любой достаточно гладкой функции  $f$  выполнено равенство

$$L(p)(f(t)e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}L(p + \lambda)f(t).$$

Левая часть равенства — результат применения дифференциального оператора  $L(p)$  к функции  $f(t)e^{\lambda t}$ ; правая часть — произведение экспоненты на результат применения дифференциального оператора  $L(p + \lambda)$  к функции  $f(t)$ . **Доказательство** Заметим, что формула сдвига линейна по  $L$ . Поэтому её достаточно доказать для многочленов вида  $L(z) = z^k$ . Это утверждение мы докажем индукцией по  $k$ ; функция  $f$  предполагается  $C^k$ -гладкой. Для  $k = 0$  утверждение тривиально.

*База индукции:*  $k = 1$ ,  $L(z) = z$ . Получаем  $p(f(t)e^{\lambda t}) = (f(t)e^{\lambda t})' = e^{\lambda t}(f'(t) + \lambda f(t)) = e^{\lambda t}(p + \lambda)f(t)$ , что и требовалось.

*Шаг индукции.* Пусть утверждение для  $L(p) = p^k$  уже доказано. Тогда для  $L(p) = p^{k+1}$  получаем:

$$p^{k+1}(fe^{\lambda t}) = p^k(e^{\lambda t}(p + \lambda)f(t)) = e^{\lambda t}(p + \lambda)^k(p + \lambda)f(t) = e^{\lambda t}(p + \lambda)^{k+1}f(t).$$

В первом равенстве мы воспользовались утверждением базы индукции, во втором — предположением индукции.  $\square$

## 9.5 Общий случай

Следующее предложение позволяет найти  $k$  решений уравнения (1), соответствующих корню характеристического многочлена кратности  $k$ .

**Предложение 4** Пусть  $\lambda$  — корень характеристического многочлена, имеющий кратность  $k$ . Тогда функции

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями уравнения (1).

**Доказательство** Так как  $\lambda$  — корень кратности  $k$ , то  $L(z) = M(z)(z - \lambda)^k$  для некоторого многочлена  $M$ . Применим формулу сдвига. Для  $r \leq k - 1$

$$L(p)(t^r e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}L(p + \lambda)t^r = e^{\lambda t}M(p + \lambda)p^k(t^r) = 0,$$

так как  $p^k(t^r) = (t^r)^{(k)} = 0$ . Это и значит, что функция  $t^r e^{\lambda t}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).  $\square$

Применяя это предложение для всех (простых и кратных) корней характеристического многочлена, мы найдем  $n$  независимых комплексных решений уравнения — комплексную фундаментальную систему решений. Следующее предложение позволяет находить вещественную фундаментальную систему решений для уравнения (1) с вещественными коэффициентами.

**Предложение 5** Пусть характеристический многочлен уравнения (1) имеет комплексные корни  $\mu_s \pm i\nu_s$  кратностей  $K_s$ ,  $s \leq r$ , и вещественные корни  $\lambda_m$ ,  $m \leq l$ , кратностей  $K'_m$ . Тогда функции

$$t^k e^{\mu_s t} \cos(\nu_s t), \quad k < K_s, s \leq r, \tag{7}$$

$$t^k e^{\mu_s t} \sin(\nu_s t), \quad k < K_s, s \leq r, \tag{8}$$

$$t^k e^{\lambda_m t} \quad k < K'_m, m \leq l \tag{9}$$

образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1).

**Доказательство** Заметим, что суммарное количество этих функций равно  $2 \sum K_s + \sum K'_m$ , то есть сумме кратностей всех корней многочлена  $L$ . По основной теореме алгебры, эта величина равна  $n$  — степени многочлена  $L$ . Итак, в системе  $n$  функций.

Все функции вида  $t^k e^{\lambda_m t}$  и  $t^k e^{(\mu_s \pm i\nu_s)t}$  являются решениями уравнения в силу предыдущего предложения. Равенство (6) показывает, что функции (7), (8) тоже являются решениями уравнения. Осталось доказать, что наша система функций линейно независима.

Так как функции (7) и (8) являются линейными комбинациями функций  $t^k e^{(\mu_s \pm i\nu_s)t}$ , достаточно доказать следующую лемму.

**Лемма 4** Для любых попарно различных комплексных чисел  $\lambda_j$  система функций

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1} e^{\lambda_1 t}; \\ & e^{\lambda_2 t}, t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{k_2} e^{\lambda_2 t}; \\ & \dots \\ & e^{\lambda_n t}, t e^{\lambda_n t}, \dots, t^{k_n} e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{10}$$

линейно независима над  $\mathbb{C}$ .

Лемма доказывается с помощью метода “деления с дифференцированием”. **Доказательство** Доказательство проводится индукцией по  $n$ .

**База индукции:**  $n = 1$ . Линейная независимость функций  $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots$  следует из линейной независимости мономов  $1, t, \dots, t^m$ .

**Шаг индукции.** Предположим противное, тогда линейная комбинация следующего вида равна нулю:

$$e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_n t} P_n(t) \equiv 0,$$

где  $P_j$  — некоторые многочлены.

Разделим это выражение на  $e^{\lambda_n t}$  и будем дифференцировать, пока последнее слагаемое — многочлен  $P_n(t)$  — не превратится в ноль. Выражение примет вид

$$(e^{(\lambda_1 - \lambda_n)t} P_1(t))^{(k)} + (e^{(\lambda_2 - \lambda_n)t} P_2(t))^{(k)} + \dots + 0 \equiv 0,$$

где  $k = \deg P_n$ . В левой части стоит комбинация  $(n - 1)$  выражений вида  $e^{\mu_j t} Q_j(t)$ . Каждое такое выражение не равно нулю:  $k$ -я производная функции может быть равна нулю только тогда, когда функция — многочлен.

Мы получили нетривиальную линейную комбинацию  $n - 1$  выражений вида  $e^{\mu_j t} Q_j(t)$ , равную нулю. Это противоречит предположению индукции.

□ Тем самым, доказано и предложение 5. □