Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

За графами и вложенными графами стоит общая комбинаторная структура, которая кодирует их существенные свойства и удобна для использования в абстрактном контексте.

За графами и вложенными графами стоит общая комбинаторная структура, которая кодирует их существенные свойства и удобна для использования в абстрактном контексте.

Системой множеств называется пара $(E;\Phi)$, состоящая из конечного множества E и множества $\Phi\subset 2^E$ его подмножеств. Система множеств $(E;\Phi)$ называется *собственной*, если множество Φ непусто; в дальнейшем, мы будем рассматривать только собственные системы множеств.

За графами и вложенными графами стоит общая комбинаторная структура, которая кодирует их существенные свойства и удобна для использования в абстрактном контексте.

Системой множеств называется пара $(E;\Phi)$, состоящая из конечного множества E и множества $\Phi \subset 2^E$ его подмножеств. Система множеств $(E;\Phi)$ называется *собственной*, если множество Φ непусто; в дальнейшем, мы будем рассматривать только собственные системы множеств.

Подобно графам и вложенным графам, системы множеств мы будем рассматривать с точностью до изоморфизма: две системы множеств $(E_1;\Phi_1)$ и $(E_2;\Phi_2)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $E_1 \to E_2$, переводящее набор множеств Φ_1 взаимно-однозначно в Φ_2.

Definition

Собственная система множеств $(E; \Phi)$ называется *дельта-матроидом*, если для нее выполняется следующая *аксиома симметричного обмена*:
для любой пары подмножеств $\phi, \psi \in \Phi$ и для любого элемента $a \in \phi\Delta\psi$ существует элемент $b \in \phi\Delta\psi$, такой, что $(\phi\Delta\{a, b\}) \in S$.

Здесь через Δ обозначена операция симметрической разности на множествах, $\phi\Delta\psi = (\phi \setminus \psi) \cup (\psi \setminus \phi)$. В аксиоме симметричного обмена элемент b может как совпадать с элементом a, так и быть отличным от него. Элементы множества Φ называются *допустимыми подмножествами* дельта-матроида $(E; \Phi)$.

Все собственные системы множеств на множестве из одного элемента являются Δ-матроидами: $(\{1\},\{\emptyset\})$, $(\{1\},\{\{1\}\})$, $(\{1\},\{\emptyset,\{1\}\})$.

Все собственные системы множеств на множестве из одного элемента являются Δ-матроидами: $(\{1\},\{\emptyset\})$, $(\{1\},\{\{1\}\})$, $(\{1\},\{\emptyset,\{1\}\})$.

Вот пример системы множеств, не являющейся дельта-матроидом, на множестве из 3 элементов: $(\{1,2,3\},\{\emptyset,\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\})$.

Все собственные системы множеств на множестве из одного элемента являются Δ-матроидами: $(\{1\},\{\emptyset\})$, $(\{1\},\{\{1\}\})$, $(\{1\},\{\emptyset,\{1\}\})$.

Вот пример системы множеств, не являющейся дельта-матроидом, на множестве из 3 элементов: $(\{1,2,3\},\{\emptyset,\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\})$.

Задача. Приведите пример пары допустимых множеств в этой системе множеств и элемента в их симметрической разности, для которых не выполняется аксиома симметричного обмена.

Каждому простому графу G и каждому вложенному графу Γ можно сопоставить дельта-матроид. Для графа конструкция выглядит следующим образом. Напомним, что граф G называется невырожденным, если определитель его матрицы смежности $A(G)$ над полем из двух элементов равен 1. *Дельта-матроидом* $\delta(G) = (V(G); \Phi(G))$ *графа* G называется система множеств, состоящая из множества $V(G)$ вершин графа G и множества $\Phi(G) \subset 2^{V(G)}$ его подмножеств, причем подмножество $U \subset V(G)$ вершин графа является допустимым (т.е. $U \in \Phi(G)$) тогда и только тогда, когда индуцированный им подграф $G|_U$ невырожден.

Каждому простому графу G и каждому вложенному графу Γ можно сопоставить дельта-матроид. Для графа конструкция выглядит следующим образом. Напомним, что граф G называется невырожденным, если определитель его матрицы смежности $A(G)$ над полем из двух элементов равен 1. *Дельта-матроидом* $\delta(G) = (V(G); \Phi(G))$ *графа* G называется система множеств, состоящая из множества $V(G)$ вершин графа G и множества $\Phi(G) \subset 2^{V(G)}$ его подмножеств, причем подмножество $U \subset V(G)$ вершин графа является допустимым (т.е. $U \in \Phi(G)$) тогда и только тогда, когда индуцированный им подграф $G|_U$ невырожден.

Theorem (А. Буше)

Для простого графа G система множеств $\delta(G)$ является Δ-матроидом.

Лекция 5. Дельта-матроиды простых графов

Theorem (А. Буше)

Для простого графа G система множеств $\delta(G)$ является Δ-матроидом.

Доказательство.

В свою очередь, *дельта-матроидом* $\delta(\Gamma) = (E(\Gamma); \Phi(\Gamma))$ *вложенного графа* Γ называется система множеств, состоящая из множества $E(\Gamma)$ ребер вложенного графа Γ и множества $S(\Gamma) \subset 2^{E(\Gamma)}$ его подмножеств, причем подмножество $U \subset E(\Gamma)$ ребер вложенного графа является допустимым (т.е. $U \in \Phi(\Gamma)$) тогда и только тогда, когда остовный вложенный подграф $\Gamma|_U$ имеет связную границу.

Theorem (А. Буше)

Система множеств $\delta(\Gamma)$ является дельта-матроидом.

В случае, если род вложенного графа Γ равен нулю (т.е. это граф, вложенный в сферу), подмножество его ребер допустимо в том и только в том случае, когда соответствующий остовный подграф $\Gamma|_U$ является деревом. В случае произвольного рода допустимые подмножества ребер дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ называются также *квазидеревьями*.

Если Γ — вложенный граф с одной вершиной, т.е. хордовая диаграмма, то соответствующие определения согласованы:

Theorem

Если C — хордовая диаграмма, т.е. вложенный граф с одной вершиной, то дельта-матроид $\delta(C)$ естественно изоморфен дельта-матроиду $\delta(g(C))$ ее графа пересечений.

Другими словами, граница хордовой диаграммы C связна тогда и только тогда, когда ее граф пересечений $g(C)$ невырожден.

Дельта-матроид графа, как и дельта-матроид ориентированного вложенного графа является четным. Дельта-матроид $(E;\Phi)$ называется *четным*, если количество элементов во всех его допустимых множествах имеет одну и ту же четность, $|\phi| \equiv |\psi| \mod 2$ для всех $\phi, \psi \in \Phi$.

Поскольку нас в первую очередь интересуют вложенные графы на ориентируемых поверхностях, далее мы будем говорить только о четных дельта-матроидах, хотя большинство описываемых ниже конструкций распространяется и на дельта-матроиды, не являющиеся четными.

Пусть Γ — вложенный граф. Что происходит с его дельта-матроидом при замене его частично-двойственным графом $\Gamma * \{e\}$, $e \in E(\Gamma)$?

Пусть Γ — вложенный граф. Что происходит с его дельта-матроидом при замене его частично-двойственным графом $\Gamma * \{e\}$, $e \in E(\Gamma)$?

Анализ структуры вложенного графа в окрестности ребра e показывает, что для всякого квазидерева $\phi \subset E(\Gamma), \phi \in \Phi(\Gamma)$, содержащего e, разность $\phi \setminus \{e^*\}$ будет квазидеревом в $\Gamma * \{e\}$; наоборот, если ϕ не содержит e, то $\phi \sqcup \{e^*\}$ является квазидеревом в $\Gamma * \{e\}$. Тем самым, вложенному графу $\Gamma * \{e\}$ отвечает дельта-матроид $(E(\Gamma); \Phi(\Gamma)) * \{e\}$. Здесь мы отождествили множество ребер вложенного графа $\Gamma * \{e\}$ с множеством ребер исходного вложенного графа Γ и через $\Phi(\Gamma) * \{e\}$ обозначили множество подмножеств $\{\phi \Delta \{e\} | \phi \in \Phi(\Gamma)\}$.

Theorem

Для произвольного дельта-матроида $(E; \Phi)$ и произвольного элемента $e \in E$, система множеств $(E; \Phi * \{e\})$ является дельта-матроидом.

Доказательство.

В общем случае, определим операцию скручивания (или частичной двойственности) дельта-матроида следующим образом. Пусть $U \subset E$ — подмножество базового множества E дельта-матроида $D = (E; \Phi)$. *Скручиванием* $D * U$ дельта-матроида D *по подмножеству* U называется система множеств $D * U = (E; \Phi * U)$, где $\Phi * U = \{\phi \Delta U | \phi \in \Phi\}$. Для дельта-матроидов вложенных графов операция скручивания соответствует частичной двойственности.

Theorem

Скручивание дельта-матроида по произвольному подмножеству его базового множества является дельта-матроидом.

Лекция 5. Бинарные дельта-матроиды

Definition

Дельта-матроид $\delta(G)$ графа G называется *графическим*. Результат скручивания графического дельта-матроида по подмножеству его базового множества называется *бинарным дельта-матроидом*.

Theorem

Дельта-матроид $\delta(\Gamma)$ *любого вложенного графа* Γ *на ориентированной поверхности является четным бинарным.*

Theorem

Дельта-матроид $\delta(\Gamma)$ любого вложенного графа Γ на ориентированной поверхности является четным бинарным.

Theorem

Дельта-матроид $\delta(\Gamma)$ любого вложенного графа Γ на ориентированной поверхности является четным бинарным.

Доказательство.

Theorem

Дельта-матроид $\delta(\Gamma)$ любого вложенного графа Γ на ориентированной поверхности является четным бинарным.

Доказательство.

Пусть во вложенном графе Γ больше одной вершины. Возьмем звено $e \in E(\Gamma)$ (т.е. ребро, не являющееся петлей). Тогда во вложенном графе $\Gamma * \{e\}$ на одну вершину меньше, чем в Γ. Последовательно выполняя частичную двойственность на звеньях, мы таким образом сводим вложенный граф Γ к вложенному графу с одной вершиной — хордовой диаграмме.

Theorem

Дельта-матроид $\delta(\Gamma)$ любого вложенного графа Γ на ориентированной поверхности является четным бинарным.

Доказательство.
Пусть во вложенном графе Γ больше одной вершины. Возьмем звено $e \in E(\Gamma)$ (т.е. ребро, не являющееся петлей). Тогда во вложенном графе $\Gamma * \{e\}$ на одну вершину меньше, чем в Γ. Последовательно выполняя частичную двойственность на звеньях, мы таким образом сводим вложенный граф Γ к вложенному графу с одной вершиной — хордовой диаграмме.

Дельта-матроид хордовой диаграммы изоморфен дельта-матроиду ее графа пересечений и является, тем самым, графическим. Дельта-матроид вложенного графа Γ получается из дельта-матроида хордовой диаграммы частичной двойственностью по подмножеству ребер, к которым мы применяли частичную двойственность. Поэтому он бинарный.

Семинары 5. Задачи

- Найдите дельта-матроиды всех вложенных графов с двумя ребрами. Какие из них являются графическими?
- Пусть $\Phi(\Gamma) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ — набор квазидеревьев связного вложенного графа Γ. Что это за вложенный граф?
- Докажите, что дельта-матроид вложенного графа изоморфен дельта-матроиду простого графа тогда и только тогда, когда пустое множество допустимо.
- Как узнать число вершин во вложенном графе Γ по его дельта-матроиду $(E(\Gamma); \Phi(\Gamma))$?

Семинары 5. Задачи

- Приведите пример четного дельта-матроида, не являющегося дельта-матроидом никакого вложенного графа.

Семинары 5. Задачи

- Приведите пример четного дельта-матроида, не являющегося дельта-матроидом никакого вложенного графа.
- Приведите пример двух неизоморфных вложенных графов с изоморфными дельта-матроидами.
- Приведите пример двух неизоморфных вложенных графов различного рода с изоморфными дельта-матроидами.
- Приведите пример двух неизоморфных простых графов с изоморфными дельта-матроидами.

- Пусть Γ — вложенный граф рода 0. Проверьте, что остовные деревья в нем образуют дельта-матроид на множестве $E(\Gamma)$ его ребер, не используя общую теорему о дельта-матроидах вложенных графов.

- Пусть Γ — вложенный граф рода 0. Проверьте, что остовные деревья в нем образуют дельта-матроид на множестве $E(\Gamma)$ его ребер, не используя общую теорему о дельта-матроидах вложенных графов.
-
-

Семинары 5. Задачи

Семинары 5. Задачи

Семинары 5. Задачи

Семинары 5. Задачи

-
-
-