# Семинар 7(крайний)

28 сентября в 10 утра по Москве пишем зачетную контрольную работу.

Обозначения: $V$ – векторное пространство, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ –базис в $V$, $V^*$ – двойственное пространство $p^1, p^2, \ldots, p^n$ – двойственный базис в $V^*$.

Для $k$-мерного линейного подпространства $U < V$ через $\Omega(U)$ обозначим $\kappa$-вектор $\wedge^k U < \wedge^k V$.

Дифференцирование (неудачно названное внутренним произведением)

1. Доказать, что линейная операция $\frac{\partial}{\partial v}$, $v \in V$, на алгебре Грассмана $\wedge V^*$ является косым дифференцированием этой алгебры.

2. Не прибегая к теории определителей доказать, что квадрат оператора $\frac{\partial}{\partial v}$ равен 0.

3. Вычислить $(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3})(p^1 \wedge p^2 \wedge p^3)$.

4. Доказать формулу Эйлера для однородной косой формы степени $r$:
$p^i \wedge (\frac{\partial}{\partial q_i}\omega) = r\omega$ (в левой части формулы стоит сумма по $i$).

## + 4 задачи

5. Доказать, что $k$-мерное подпространство $U < V$ однозначно определяется образом вектора $\Omega(U)$ в проективном пространстве $P(\wedge^k V)$.

6. Подпространство $U_1$ тогда и только тогда содержится в подпространстве $U_2$, когда $\Omega(U_2)$ делится на $\Omega(U_1)$. Доказать.

7. Верно ли, что делимость элементов в задаче 6 эквивалентна тому, что $\Omega(U_1) \wedge \Omega(U_2) = 0$?

8. Доказать, что любой элемент $\omega \in \wedge^{n-1} V$ разложим.