Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать мне на почту artamkin@mail.ru , ДО УТРА СРЕДЫ перед следующим занятием.

Задания с 4 занятия.

(1) Пусть R — произвольное (коммутативное, ассоциативное и с 1) кольцо, M — максимальный идеал в нем. Покажите, что множество $S = R\backslash M$ мультипликативно замкнуто, причем в кольце $S^{-1}R$ имеется единственный максимальный идеал.

(2) Докажите, что на проективном многообразии положительной размерности нет регулярных функций, кроме констант.

(3) Бывают ли в $\mathbb{P}^n$ аффинные открытые подмножества, не содержащиеся ни в какой стандартной аффинной карте $\mathbb{A}^n_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)\ ,\ x_i \neq 0\}$ ни при каком выборе проективных координат?

(4) Прямая $AB \subset \mathbb{P}^n$ называется касательной прямой к гиперповерхности $X \in \mathbb{P}^n$ ($A \in X$), заданной однородным уравнением $F(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = 0$, если ограничение формы F на прямую AB имеет кратный корень в точке A. (Если точки A и B имеют, соответственно, однородные координаты $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ и $(b_0 : b_1 : \ldots : b_n)$, то ограничение F на AB является однородной формой от однородных координат $(s : t)$ на прямой AB: $F(sa_0+tb_0 : sa_1+tb_1 : \ldots : sa_n+tb_n)$, и значение $t = 0$ должно быть кратным корнем этой формы.)

Докажите, что геометрическое место точек B таких, что прямая AB касается X в фиксированной точке A, либо совпадает с $\mathbb{P}^n$, либо является гиперплоскостью $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, называемой в этом случае касательной гиперплоскостью. (В первом случае точка A называется особой, во втором — простой.) Как в терминах формы F записать условие простоты точки и уравнение касательной гиперплоскости?

(5) Остаются части (c) и (d) задачи 1 из позапрошлого списка.