# Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Поскольку каждому графу и каждому вложенному графу сопоставляется дельта-матроид, инварианты дельта-матроидов определяют также инварианты графов и инварианты вложенных графов.

# Лекция 6. Инварианты дельта-матроидов

Поскольку каждому графу и каждому вложенному графу сопоставляется дельта-матроид, инварианты дельта-матроидов определяют также инварианты графов и инварианты вложенных графов.

В этой лекции мы определим некоторые инварианты дельта-матроидов и обсудим, как их выражать в терминах графов и вложенных графов. Чаще всего эти инварианты естественно определяются для произвольных систем множеств, однако по-настоящему полезными оказываются, в первую очередь, для бинарных дельта-матроидов.

**Definition**

*Расстоянием* от системы множеств $D = (E; \Phi)$ до подмножества $\psi \subset E$ называется величина

$$d_D(\psi) = \min_{\phi \in \Phi} |\phi \Delta \psi|.$$

**Definition**

*Расстоянием* от системы множеств $D=(E;\Phi)$ до подмножества $\psi\subset E$ называется величина

$$d_D(\psi)=\min_{\phi\in\Phi}|\phi\Delta\psi|.$$

**Definition**

*Многочленом переплетений* $L_D(x)$ системы множеств $D=(E;\Phi)$ называется многочлен

$$L_D(x)=\sum_{\psi\subset E}x^{d_D(\psi)}.$$

**Пример.** Вычислим многочлен переплетений дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ торического вложенного графа $\Gamma$, состоящего из двух вершин и трех соединяющих их ребер.

**Пример.** Вычислим многочлен переплетений дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ торического вложенного графа $\Gamma$, состоящего из двух вершин и трех соединяющих их ребер.

Базовое множество $E(\Gamma)$ состоит из трех элементов. Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(\emptyset)$ от пустого подмножества ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 1. Вклад пустого множества в многочлен переплетений равен $x^1 = x$.

**Пример.** Вычислим многочлен переплетений дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ торического вложенного графа $\Gamma$, состоящего из двух вершин и трех соединяющих их ребер.

Базовое множество $E(\Gamma)$ состоит из трех элементов. Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(\emptyset)$ от пустого подмножества ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 1. Вклад пустого множества в многочлен переплетений равен $x^1 = x$.

Каждое из трех одноэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ является квазидеревом, поэтому расстояние для них равно 0. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^0 = 3$.

**Пример.** Вычислим многочлен переплетений дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ торического вложенного графа $\Gamma$, состоящего из двух вершин и трех соединяющих их ребер.

Базовое множество $E(\Gamma)$ состоит из трех элементов. Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(\emptyset)$ от пустого подмножества ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 1. Вклад пустого множества в многочлен переплетений равен $x^1 = x$.

Каждое из трех одноэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ является квазидеревом, поэтому расстояние для них равно 0. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^0 = 3$.

Для каждого из трех двухэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ расстояние до $\delta(\Gamma)$ равно 1. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^1 = 3x$.

# Лекция 6. Многочлен переплетений дельта-матроидов: примеры

**Пример.** Вычислим многочлен переплетений дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ торического вложенного графа $\Gamma$, состоящего из двух вершин и трех соединяющих их ребер.

Базовое множество $E(\Gamma)$ состоит из трех элементов. Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(\emptyset)$ от пустого подмножества ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 1. Вклад пустого множества в многочлен переплетений равен $x^1 = x$.

Каждое из трех одноэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ является квазидеревом, поэтому расстояние для них равно 0. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^0 = 3$.

Для каждого из трех двухэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ расстояние до $\delta(\Gamma)$ равно 1. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^1 = 3x$.

Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(E(\Gamma))$ от подмножества всех ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 0, поэтому вклад подмножества всех ребер в многочлен переплетений равен $x^0 = 1$.

**Пример.** Вычислим многочлен переплетений дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ торического вложенного графа $\Gamma$, состоящего из двух вершин и трех соединяющих их ребер.

Базовое множество $E(\Gamma)$ состоит из трех элементов. Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(\emptyset)$ от пустого подмножества ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 1. Вклад пустого множества в многочлен переплетений равен $x^1 = x$.

Каждое из трех одноэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ является квазидеревом, поэтому расстояние для них равно 0. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^0 = 3$.

Для каждого из трех двухэлементных подмножеств в $E(\Gamma)$ расстояние до $\delta(\Gamma)$ равно 1. Их общий вклад в многочлен переплетений равен $3x^1 = 3x$.

Расстояние $d_{\delta(\Gamma)}(E(\Gamma))$ от подмножества всех ребер до дельта-матроида $\delta(\Gamma)$ равно 0, поэтому вклад подмножества всех ребер в многочлен переплетений равен $x^0 = 1$.

Тем самым, многочлен переплетений дельта-матроида вложенного графа $\Gamma$ равен

$$L_{\delta(\Gamma)}(x) = x + 3 + 3x + 1 = 4x + 4.$$

Пусть $G$ — простой граф. Для любой пары смежных вершин $a, b$ графа $G$ остальные его вершины разбиваются на четыре класса:

1. вершины, смежные с $a$ но не смежные с $b$;
2. вершины, смежные с $b$ но не смежные с $a$;
3. вершины, смежные как с $a$, так и с $b$;
4. вершины, не смежные ни с $a$, ни с $b$.

Пусть $G$ — простой граф. Для любой пары смежных вершин $a, b$ графа $G$ остальные его вершины разбиваются на четыре класса:

1. вершины, смежные с $a$ но не смежные с $b$;
2. вершины, смежные с $b$ но не смежные с $a$;
3. вершины, смежные как с $a$, так и с $b$;
4. вершины, не смежные ни с $a$, ни с $b$.

*Поворот* $G^{ab}$ графа $G$ по ребру $ab$ это граф, полученный изменением смежности между вершинами первых трех классов, если они принадлежат разным классам.

# Лекция 6. Многочлен переплетений графов

Пусть $G$ — простой граф. Для любой пары смежных вершин $a, b$ графа $G$ остальные его вершины разбиваются на четыре класса:

1. вершины, смежные с $a$ но не смежные с $b$;
2. вершины, смежные с $b$ но не смежные с $a$;
3. вершины, смежные как с $a$, так и с $b$;
4. вершины, не смежные ни с $a$, ни с $b$.

*Поворот* $G^{ab}$ графа $G$ по ребру $ab$ это граф, полученный изменением смежности между вершинами первых трех классов, если они принадлежат разным классам.

*Многочлен переплетений* $L_G(x)$ определяется рекуррентно следующими условиями:

1. если в графе $G$ нет ребер, то $L_G(x) = x^n$, где $n$ — число вершин в $G$;
2. для любого ребра $ab$ в $G$

$$L_G(x) = L_{G\setminus a}(x) + L_{G^{ab}\setminus b}(x),$$

$G \setminus a$ — граф, полученный из $G$ удалением вершины $a$ и всех входящих в нее ребер.

Пусть $C$ — хордовая диаграмма, $a, b$ — пара пересекающихся хорд в ней. *Поворот* $C^{ab}$ на паре $ab$ это хордовая диаграмма, полученная последовательным обходом хордовой диаграммы $C$ по дугам, на которые ее разделяют концы хорд $a$ и $b$, с включением этих хорд в путь обхода.

Пусть $C$ — хордовая диаграмма, $a, b$ — пара пересекающихся хорд в ней. *Поворот* $C^{ab}$ на паре $ab$ это хордовая диаграмма, полученная последовательным обходом хордовой диаграммы $C$ по дугам, на которые ее разделяют концы хорд $a$ и $b$, с включением этих хорд в путь обхода.

**Theorem**

*Для графов пересечений $g(C)$, $g(C^{ab})$ хордовых диаграмм справедливо равенство $g(C)^{ab} = g(C^{ab})$.*

**Theorem**

*Пусть $\delta(G)$ — дельта-матроид графа $G$, $a, b$ — концы ребра в $G$; тогда дельта-матроид поворота $G^{ab}$ графа $G$ по ребру $ab$ является результатом скручивания дельта-матроида $\delta(G)$ по подмножеству $\{a, b\}$, $\delta(G^{ab}) = \delta(G) * \{a, b\}$.*

**Theorem**

*Пусть $\delta(G)$ — дельта-матроид графа $G$, $a, b$ — концы ребра в $G$; тогда дельта-матроид поворота $G^{ab}$ графа $G$ по ребру $ab$ является результатом скручивания дельта-матроида $\delta(G)$ по подмножеству $\{a, b\}$, $\delta(G^{ab}) = \delta(G) * \{a, b\}$.*

**Доказательство.** Пусть $x, y \in V(G)$ — две вершины графа $G$, отличные от $a$ и $b$ и лежащие в двух различных из первых трех классов по отношению к $a$ и $b$. Тогда подмножество $\{x, y\} \subset V(G)$ вырождено (вершины $x$ и $y$ не соединены ребром), а подмножество $\{a, b, x, y\}$ невырождено (индуцированный им граф является либо цепочкой на 4 вершинах, либо треугольником с листом). Симметрическая разность $\{a, b, x, y\}\Delta\{a, b\} = \{x, y\}$ становится допустимым множеством после скручивания — после поворота $x$ и $y$ соединены ребром.

**Theorem**

*Пусть $\delta(G)$ — дельта-матроид графа $G$, $a, b$ — концы ребра в $G$; тогда дельта-матроид поворота $G^{ab}$ графа $G$ по ребру $ab$ является результатом скручивания дельта-матроида $\delta(G)$ по подмножеству $\{a, b\}$, $\delta(G^{ab}) = \delta(G) * \{a, b\}$.*

**Доказательство.** Пусть $x, y \in V(G)$ — две вершины графа $G$, отличные от $a$ и $b$ и лежащие в двух различных из первых трех классов по отношению к $a$ и $b$. Тогда подмножество $\{x, y\} \subset V(G)$ вырождено (вершины $x$ и $y$ не соединены ребром), а подмножество $\{a, b, x, y\}$ невырождено (индуцированный им граф является либо цепочкой на 4 вершинах, либо треугольником с листом). Симметрическая разность $\{a, b, x, y\}\Delta\{a, b\} = \{x, y\}$ становится допустимым множеством после скручивания — после поворота $x$ и $y$ соединены ребром.

Наоборот, если $x$ и $y$ лежат в одном классе, то соответствующие им строки в матрице смежности подграфа, индуцированного из $G$ подмножеством вершин $\{a, b, x, y\}$, равны, т.е. эта матрица смежности вырождена, поэтому это подмножество недопустимо, и примыкание $x$ к $y$ в $G^{a,b}$ остается тем же, что и в $G$. □

Пусть $D = (E; \Phi)$ — дельта-матроид, $e \in E$. Предположим, что $e$ — не петля, т.е. $e$ входит по крайней мере в одно допустимое множество. Тогда можно определить дельта-матроид $D \setminus e$ — результат удаления элемента $e$ из $D$. Его базовое множество это $E \setminus \{e\}$, а допустимые множества имеют вид $\Phi \setminus e = \{F \in \Phi, e \notin F\}$.

Пусть $D=(E;\Phi)$ — дельта-матроид, $e\in E$. Предположим, что $e$ — не петля, т.е. $e$ входит по крайней мере в одно допустимое множество. Тогда можно определить дельта-матроид $D\setminus e$ — результат удаления элемента $e$ из $D$. Его базовое множество это $E\setminus\{e\}$, а допустимые множества имеют вид $\Phi\setminus e=\{F\in\Phi, e\notin F\}$.

Определим теперь *многочлен переплетений дельта-матроидов* рекуррентными соотношениями. Элемент $e\in E$ дельта-матроида $D=(E;\Phi)$ называется *копетлей*, если он входит все допустимые множества. Пусть $e\in E$ — не петля и не копетля в дельта-матроиде $D=(E;\Phi)$; положим

$$L_D(x)=L_{D\setminus e}(x)+L_{(D*e)\setminus e}(x).$$

Если же всякий элемент в $D$ является петлей или копетлей, то полагаем $L_D(x)=(x+1)^{|E|}$.

# Лекция 6. Операция поворота на дельта-матроидах

Пусть $D = (E; \Phi)$ — дельта-матроид, $e \in E$. Предположим, что $e$ — не петля, т.е. $e$ входит по крайней мере в одно допустимое множество. Тогда можно определить дельта-матроид $D \setminus e$ — результат удаления элемента $e$ из $D$. Его базовое множество это $E \setminus \{e\}$, а допустимые множества имеют вид $\Phi \setminus e = \{F \in \Phi, e \notin F\}$.

Определим теперь *многочлен переплетений дельта-матроидов* рекуррентными соотношениями. Элемент $e \in E$ дельта-матроида $D = (E; \Phi)$ называется *копетлей*, если он входит все допустимые множества. Пусть $e \in E$ — не петля и не копетля в дельта-матроиде $D = (E; \Phi)$; положим

$$L_D(x) = L_{D\setminus e}(x) + L_{(D*e)\setminus e}(x).$$

Если же всякий элемент в $D$ является петлей или копетлей, то полагаем $L_D(x) = (x+1)^{|E|}$.

**Theorem**

*Если $\delta(G)$ — дельта-матроид графа $G$, то $L_{\delta(G)}(x) = L_G(x-1)$.*

**Definition**

*Многочленом Боллобаша–Риордана* четного дельта-матроида $D=(E;\Phi)$ называется многочлен от трех переменных, удовлетворяющий соотношению удаления-стягивания

$$B_D(x,y,z)=\begin{cases} B_{D\setminus e}(x,y,z)+B_{D/e}(x,y,z) & \text{если e элемент базового множества,} \\ & \text{не являющийся копетлей} \\ xB_{D/e}(x,y,z) & \text{если e — копетля} \end{cases}$$

Здесь через $D/e$ обозначен результат *стягивания* элемента $e$ в дельта-матроиде:

$$D/e=(D*e)\setminus e.$$

Для завершения определения многочлена Боллобаша–Риордана необходимо задать начальные условия рекурсии.
Значение многочлена Боллобаша–Риордана на дельта-матроиде $D=(E;\Phi)$, в котором пустое множество допустимо, задается равенством

$$B_D(x,y,z)=\sum_{U\subset E} y^{|U|}z^{1-\mathrm{bc}(D|_U)+|U|},$$

где суммирование происходит по всем подмножествам множества $E$, через $D|_U$ обозначен дельта-матроид, индуцированный подмножеством $U$, а через $\mathrm{bc}(D)$ — количество компонент связности границы дельта-матроида $D$, т.е. размер минимального допустимого подмножества в двойственном дельта-матроиде $D*E$; последний равен разности количества $|E|$ элементов в $E$ и наибольшей мощности допустимого подмножества в $D$.

- Докажите, что результат $D/e$ стягивания элемента $e \in E$ в дельта-матроиде $D = (E; \Phi)$ можно определить как
$$D/e = (E \setminus \{e\}, \{\phi \setminus \{e\} | \phi \in \Phi, e \in \phi\}).$$
- Проверьте, что $D = (\{a, b, c\}; \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\})$ — дельта-матроид.
- Вычислите для дельта-матроида $D$ из предыдущего примера его многочлен переплетений и многочлен Боллобаша–Риордана.

- Вычислите многочлен переплетений а) полного графа на $n$ вершинах $K_n$; б) цикла на $n$ вершинах $C_n$; в) полного двудольного графа $K_{m,n}$.

# Семинары 6. Задачи

- Вычислите многочлен переплетений а) полного графа на $n$ вершинах $K_n$; б) цикла на $n$ вершинах $C_n$; в) полного двудольного графа $K_{m,n}$.

# Семинары 6. Задачи

- Вычислите многочлен переплетений а) полного графа на $n$ вершинах $K_n$; б) цикла на $n$ вершинах $C_n$; в) полного двудольного графа $K_{m,n}$.
-
-

# Семинары 6. Задачи

- Докажите, что если $D$ — дельта-матроид, то все минимальные по включению допустимые множества в $D$ имеют одинаковую мощность.
- Докажите, что система множеств $D = (E; \Phi)$ является дельта-матроидом в том и только в том случае, если для любого подмножества $X \subset E$ все минимальные по включению допустимые множества в дельта-матроиде $D * X$ имеют одинаковую мощность.