

Дифференциальные уравнения. Листок 1

Срок сдачи 25 ноября. Листок сдаётся Ю. С. Ильяшенко или А. В. Клименко (заранее договаривайтесь о времени сдачи задач). Правила сдачи приведены в файле с формулой оценивания. После номера задачи приведены баллы за неё.

Задача 1 (3). При каких значениях C через каждую точку плоскости (t, x) проходит ровно одна интегральная кривая уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x - C \sin x}$?

Задача 2 (3). Верно ли, что все замкнутые интегральные кривые C^1 -гладкого однородного уравнения на плоскости обходят начало координат?

Задача 3 (3). При каких α, β, γ функции $\sin \alpha t, \sin \beta t, \sin \gamma t$ линейно зависимы?

Задача 4 (2+2). а) Верно ли, что если определитель Вронского двух дважды гладких функций на прямой тождественно равен нулю, то эти функции линейно зависимы?
б) Тот же вопрос для аналитических функций.

Задача 5 (5). Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x \sin^{2023} t + f(t).$$

Докажите, что если функция f нечётна и 2π -периодична, то его отображение монодромии M тождественно.

Указание: какое уравнение имеет отображением монодромии M^{-1} ?

Задача 6 (5). Рассмотрим квадратичное векторное поле на плоскости:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

где P, Q — многочлены второй степени. Докажите, что каждая замкнутая фазовая кривая этого поля выпукла.

Задача 7 (1+3). а) Приведите пример замкнутой, но не точной 1-формы на проколотой плоскости.

б) Верно ли, что для любых двух замкнутых 1-форм на проколотой плоскости существует их нетривиальная линейная комбинация, которая точна?