

Программа коллоквиума

1. Алгебры и σ -алгебры. Борелевская σ -алгебра. Борелевская σ -алгебра прямой порождается лучами, но не точками.
2. Аддитивность и счетная аддитивность. Пример аддитивной, но не счетно-аддитивной функции на алгебре. Равносильность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для аддитивной функции на алгебре.
3. Компактные классы множеств. Компактность класса компактных множеств. Счетная аддитивность аддитивной функции на алгебре, имеющей компактный приближающий класс. Формулировка теоремы о приближении компактами для борелевских мер.
4. Внешняя мера, порожденная счетно-аддитивной мерой на алгебре; ее монотонность и счетная полуаддитивность. Определение измеримости по Лебегу.
5. Формулировка теоремы о внешней мере на классе измеримых множеств. Пример Витали неизмеримого множества.
6. Построение классической меры Лебега на отрезке и кубе. Мера Лебега на всем пространстве, ее основные свойства (трансляционная и сферическая инвариантность).
7. Измеримые функции и их основные свойства (суммы, произведения, пределы). Измеримые функции как пределы простых функций.
8. Теорема Егорова. Теорема Лузина.
9. Определение интеграла Лебега для простых функций и общее определение. Неравенство Чебышёва.
10. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
11. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
12. Теорема Бешпо Леви о монотонной сходимости. Теорема Фату.

Положительная оценка не может быть получена без знания следующих определений:
 σ -алгебра, борелевская σ -алгебра, счетно-аддитивная мера, мера Лебега на отрезке, измеримая функция, интеграл Лебега.