

12 Лекция 12. Вычисление экспоненты линейного оператора

12.1 Эквивалентность двух определений экспоненты

Докажем, что

$$\Delta_k(A) = \left(E + A + \dots + \frac{A^k}{k!} \right) - \left(E + \frac{A}{k} \right)^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

В случае $n = 1$, $A = a$ это утверждение доказано в курсе анализа:

$$\delta_k(a) = \left(1 + a + \dots + \frac{a^k}{k!} \right) - \left(1 + \frac{a}{k} \right)^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть $\|A\| =: a$, c_j — коэффициент при A^j в сумме $\Delta_k(A)$: $\Delta_k(A) = \sum_{j=0}^k c_j A^j$. Заметим, что он совпадает с коэффициентом при a^j в сумме $\delta_k(a)$.

Сначала приведем **неправильное доказательство**. Пользуясь неравенством $\|A^j\| \leq \|A\|^j = a^j$, оценим

$$\|\Delta_k(A)\| = \left\| \sum_{j=0}^k c_j A^j \right\| \leq \sum_{j=0}^k c_j a^j = \delta_k(a) \quad (1)$$

По доказанному в курсе анализа, $\delta_k(a)$ стремится к нулю.

Где ошибка?

В этом рассуждении есть ошибка: в оценке (1) вместо $|c_j|$ мы написали c_j . Но на самом деле, $c_j \geq 0$, поэтому рассуждение правильно.

Лемма 1 Коэффициенты c_j неотрицательны.

Доказательство Выпишем явную формулу для c_j :

$$c_j = \frac{1}{j!} - C_k^j \frac{1}{k^j}$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты:

$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Преобразуем:

$$c_j = \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{k!}{(k-j)!k^j} \right) = \frac{1}{j!} (1 - b_{kj}),$$

где

$$b_{kj} = \frac{k(k-1) \cdot (k-j+1)}{k^j} \leq 1$$

Поэтому $c_j \geq 0$, что и требовалось доказать. □

12.2 Экспонента суммы операторов

В этом разделе мы получим формулу для экспоненты суммы, которая пригодится нам в будущем.

Теорема 1 Пусть A, B — коммутирующие линейные отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , то есть $AB = BA$. Тогда

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (2)$$

Утверждение неверно, если операторы не коммутируют.

Доказательство Сначала — наводящее соображение. Выпишем ряд для экспоненты суммы и для произведения экспонент:

$$e^{A+B} = E + (A+B) + \frac{(A+B)(A+B)}{2} + \dots = E + (A+B) + \frac{A^2 + AB + BA + B^2}{2} + \dots$$

и

$$e^A e^B = \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right) \left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) = E + (A+B) + \frac{A^2 + 2AB + B^2}{2} + \dots$$

Видно, что условие $AB = BA$ обеспечивает совпадение членов второго порядка.

Перейдём к доказательству. Напомним, что ряды для экспоненты сходятся абсолютно, поэтому их можно перемножать почленно. Значит, нам достаточно показать, что в левой и правой части записи

$$E + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2} + \dots \stackrel{?}{=} \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right) \left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) \quad (3)$$

совпадают коэффициенты при $A^k B^l$.

Запишем такие же точно ряды для экспонент e^{a+b} и $e^a e^b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Нам известно, что $e^{a+b} = e^a e^b$, поэтому

$$1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} + \dots = \left(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots\right) \left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \dots\right)$$

и коэффициенты при $a^k b^l$ слева и справа совпадают. Но эти коэффициенты такие же, как и в записи (3) (здесь мы пользуемся тем, что операторы коммутируют). Значит, в левой и правой части записи (3) коэффициенты при $A^k B^l$ совпадают, что и требовалось доказать. \square

12.3 Экспонента жордановой клетки и общий случай

Нам понадобится следующая теорема из курса линейной алгебры:

Теорема 2 Для любого оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ существует жорданов базис — базис, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_m \end{pmatrix}$$

где по диагонали стоят жордановы клетки $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Понятно, что экспонента от жордановой нормальной формы имеет вид

$$e^{J_A} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{J_2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & e^{J_m} \end{pmatrix}$$

Теперь достаточно вычислить экспоненту от жордановой клетки. Жорданову клетку можно представить в виде $\lambda E + N$, где E — единичный оператор,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— нильпотентный оператор.

Мы применим формулу для экспоненты суммы коммутирующих операторов: $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$. Заметим, что оператор λE коммутирует с любым оператором. Поэтому $e^J = e^{\lambda E + N} = e^{\lambda E} \cdot e^N$. Ясно, что $e^{\lambda E}$ — это оператор умножения на e^λ .

Под действием оператора N каждый базисный вектор переходит в предыдущий: $e^l \mapsto \dots \mapsto e^2 \mapsto e^1 \mapsto 0$. Поэтому $N^l = 0$ (это и означает, что оператор N нильпотент-

тен). Получаем

$$e^N = E + N + \dots + \frac{N^{l-1}}{(l-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(l-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Заодно выпишем e^{Nt} , так как для решения линейных уравнений нам нужны выражения вида e^{At} :

$$e^{Nt} = E + Nt + \dots + \frac{N^{l-1}t^{l-1}}{(l-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \end{pmatrix} \quad (4)$$

Значит,

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Мы получили формулу для экспоненты от жордановой клетки, то есть выяснили, как действует оператор e^{At} на жорданов базис. Это позволяет выяснить, какую матрицу он имеет в любом другом базисе.

В общем случае, чтобы вычислить экспоненту оператора в данном базисе (f^1, \dots, f^n) , нужно найти жорданов базис (e^1, \dots, e^n) и жорданову нормальную форму оператора, воспользоваться формулой для экспоненты жордановой клетки, а потом вернуться из жорданова базиса в исходный.

Предложение 1 Пусть оператор A имеет жорданов базис

$$\xi^{11}, \dots, \xi^{1n_1}, \xi^{21}, \dots, \xi^{2n_2}, \dots$$

(вещественный или комплексный). Здесь векторы ξ^{jm} , $m = 1, 2, \dots, n_j$, соответствуют j -й жордановой клетке, которая имеет размер n_j .

Тогда решение уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(0) = \xi^{jm}$ имеет вид

$$x(t) = e^{\lambda_j t} (\xi^{jm} + t\xi^{j(m-1)} + \frac{t^2}{2!}\xi^{j(m-2)} + \dots + \frac{t^m}{m!}\xi^1) \quad (6)$$

Решение уравнения с любым начальным условием является линейной комбинацией таких решений.

Доказательство Действительно, напомним, что оператор e^{At} сохраняет пространство, натянутое на векторы $(\xi^{jm}, m = 1, 2, \dots, n_j)$, и его матрица в этом базисе — экспонента жордановой клетки e^{Jt} . Координаты вектора $e^{At}\xi^{jm}$ записаны по столбцам такой матрицы, значит, они равны $\frac{t^s}{s!}e^{\lambda_j t}$, $s = m, m-1, \dots, 0$. Отсюда следует формула 6. \square

Следствие 1 Если жорданова форма вещественного линейного оператора A состоит из клеток с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ размеров n_1, n_2, \dots, n_k , то координаты решения уравнения $\dot{x} = Ax$ — линейные комбинации выражений вида $p_k(x)e^{\Re\lambda_k t} \sin \Im\lambda_k t$ и $p_k(x)e^{\Re\lambda_k t} \cos \Im\lambda_k t$; степень многочлена p_k не больше, чем $n_k - 1$, где n_k — размер наибольшей жордановой клетки, соответствующей λ_k .

Размер наибольшей жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ оператора A , также называют *геометрической кратностью* λ как собственного значения A , в отличие от обычной (*алгебраической*) кратности.