Семинар 5.

Задача 1. На евклидовой плоскости с координатами x, y дана окружность ω радиуса 1 с центром в точке $A = (0, 1)$. Верхняя точка $N = (0, 2)$ окружности ω называется ее *северным полюсом.* Рассмотрим ось абсцисс $l = OX$, касающуюся окружности ω в начале координат $O = (0, 0)$ и возьмем проективную прямую $\mathbb{P}^1$, получаемую из прямой l добавлением бесконечно удаленной точки. Отображение $p : \ \omega \setminus \{N\} \to l, \ Y \mapsto NY \cap l$ называется *стереографической проекцией* окружности ω на прямую l из центра (северного полюса) N, а отображение $\varphi : \ \omega \to \omega, \ Y \mapsto Z$, где YZ - диаметр окружности ω, называется *антиподальным отображением* окружности ω в себя.

Рассмотрим отображение $f : \ l \setminus \{O\} \to l$, представляющее собой композицию отображений $f = p \circ \varphi \circ p^{-1}$. Докажите, что f продолжается до инволюции $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и найдите формулу этой инволюции как дробно-линейного преобразования (в координате x на l).

Задача 2. Даны две различные проективные прямые l_1 и l_2 в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и пусть даны различные точки $A, B, C \in l_1$ и $A', B', C' \in l_2$, отличные от S. Докажите теорему Паппа, утверждающую, что точки $M = AB' \cap A'B$, $N = AC' \cap A'C$ и $P = BC' \cap B'C$ коллинеарны. (Прямая MN называется *прямой Паппа.*)

Задача 3. Даны две различные проективные прямые l_1 и l_2 в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано проективное отображение $F : l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$ такое, что $F(S) \neq S$. Пусть p - прямая Паппа, построенная по точкам $A, B, C \in l_1$ и точкам $f(A), f(B), f(C) \in l_2$. Покажите, что прямая Паппа p не зависит от выбора точек $A, B, C \in l_1$, а зависит только от отображения f. Как ее построить, зная только отображение f и не привлекая точек $A, B, C \in l_1$ и точек $f(A), f(B), f(C) \in l_2$.

Задача 4. 1) Докажите, совпадение определения двойного отношения $(ABCD)$ четырех различных точек $A, \ B, \ C, \ D$ на проективной прямой через $\frac{\lambda}{\mu}$ с определением через отношение определителей $\frac{|xz|}{|xw|} / \frac{|yz|}{|yw|}$ и с определением в аффинной карте как отношения $\frac{|a-c|}{|a-d|} / \frac{|b-c|}{|b-d|}$; эти определения были даны на семинаре 4.
2) Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных отображениях, т.е. если $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}'^1$ - проективное отображение и $A, \ B, \ C, \ D$ - четыре различные точки на $\mathbb{P}^1$, то $(ABCD) = (f(A)f(B)f(C)f(D))$.

Задача 5. 1) Докажите, что если на проективной прямой пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D, то и пара точек C, D гармонически делит пару точек A, B.
2) Докажите, что определение гармонической четверки точек, данное на семинаре 4, не зависит от вспомогательного 4-вершинника $PQRS$, с помощью которого определялась гармоническая четверка, т.е. если $AB \overset{h}{-} CD$ и $AB \overset{h}{-} CD'$, то $D = D'$. Пусть пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D. Найдите двойное отношение $(ABCD)$ этих точек. Чему равно двойное отношение $(CDAB)$?