Семинар 3.

В этом и последующем заданиях всюду через $\mathbf{k}$ обозначается основное поле. Поле $\mathbf{k}$ может быть числовым полем, например, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, либо нечисловым, например, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$. Элементы основного поля будем называть *скалярами.* Если в задаче не оговаривается, над каким основным полем мы работаем, то, значит, задача сформулирована для произвольного основного поля $\mathbf{k}$.

Задача 1. В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$, $\dim_{\mathbf{k}} V = 4$, фиксирована точка x и рассматривается множество N всех проективных прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через точку x. (Это множество N называется *связкой прямых с центром* x.) Как можно охарактеризовать *базу* связки N, то есть такое множество (имеющее смысл в проективном пространстве), точки которого биективно соответствуют прямым из N.

Задача 2. Даны две различные проективные прямые l и m в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано перспективное отображение $f : l \xrightarrow{\sim} m$ с центром $A \notin l \cup m$. (По определению, образом произвольной точки $X \in l_1$ при отображении F является точка $Y = (AX) \cap m$.) Докажите, что f является проективным отображением.

Задача 3. Из определения перспективного отображения $f : l \xrightarrow{\sim} m$ между двумя прямыми l и m на плоскости, данного в предыдущей задаче, следует, что $f(S) = S$. Докажите, что, обратно, всякое проективное отображение$f : l \xrightarrow{\sim} m$, при котором точка $S = l \cap m$ отображается в себя, является перспективным отображением.

Задача 4. Даны две различные проективные прямые l и m в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано проективное отображение $f : l \xrightarrow{\sim} m$ такое, что $f(S) \neq S$. В композицию какого минимального числа перспектив можно разложить отображение f?