

Семинар 4.

Задача 1. Дана проективная прямая l , и дано проективное преобразование $f : l \xrightarrow{\sim} l$, задаваемое в аффинной карте на l с аффинной координатой x как дробно-линейное преобразование $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$. Преобразование f называется *инволюцией*, если f не является тождественным преобразованием, а его квадрат $f^2 := f \circ f$ является тождественным преобразованием. Какие условия надо наложить на коэффициенты a, b, c, d , чтобы f было инволюцией?

Задача 2. Сколько неподвижных точек может иметь произвольное нетождественное проективное преобразование f проективной прямой \mathbb{P}^1 :

- над произвольным основным полем \mathbf{k} ,
- над алгебраически замкнутым полем \mathbf{k} ?
- Ответьте на вопросы а) и б), когда f - инволюция.

Задача 3. (В этой и следующей задачах предполагается, что характеристика основного поля не равна 2.) Даны 3 различные точки A, B, C на проективной прямой \mathbb{P}^1 . Докажите, что существует единственная точка D на \mathbb{P}^1 такая, что пара AB гармонически делит пару CD : $AB \stackrel{h}{\sim} CD$.

Задача 4. Даны 4 точки A, B, C, D на проективной прямой \mathbb{P}^1 такие, что пара AB гармонически делит пару CD . Пусть точки A, B, C, D имеют аффинные координаты соответственно a, b, c, d в некоторой аффинной карте. Найдите выражение $\left(\frac{a-c}{a-d}\right) / \left(\frac{b-c}{b-d}\right)$.