ОДУ-2022. Семинар №6

(11/14 октября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Уравнения в дифференциалах (пфаффовы уравнения)

Напомним некоторые сведения из анализа. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. 1-форма $\omega : V \to \mathbb{R}$ — это линейная функция на векторах V (то есть $\omega \in V^*$).

В любой точке $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ есть двумерное вещественное векторное пространство векторов с началом в этой точке — касательное пространство $T_{P_0}\mathbb{R}^2$. Пространство 1-форм в точке (x_0, y_0) — дуальное векторное пространство $T^*_{P_0}\mathbb{R}^2$ (кокасательное пространство в точке P_0). Это пространство двумерно, и мы введем базисные 1-формы dx и dy, действующие по правилу:

$$
\begin{aligned}
dx(\vec{e}_x) &= 1 \qquad & dx(\vec{e}_y) &= 0 \\
dy(\vec{e}_x) &= 0 \qquad & dy(\vec{e}_y) &= 1.
\end{aligned}
$$

Иначе говоря, формы dx и dy возвращают x- и y-координату вектора: если $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$, то $dx(\vec{v}) = v_x$, $dy(\vec{v}) = v_y$.

Любая 1-форма из пространства $T^*_{P_0}\mathbb{R}^2$ есть линейная комбинация базисных 1-форм:

$$\omega = \omega_x dx + \omega_y dy,$$

где вещественные числа ω_x и ω_y — координаты 1-формы.

Определение. Дифференциальная 1-форма в области $D \subset \mathbb{R}^2$ — это правило, сопоставляющее любой точке $(x, y) \in D$ 1-форму из соответствующего кокасательного пространства $T^*_{(x,y)}\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x, y) = \omega_x(x, y)dx + \omega_y(x, y)dy,$$

где коэффициенты $\omega_x(x, y)$ и $\omega_y(x, y)$ — непрерывные функции в $D \subset \mathbb{R}^2$.

Дифференциальная форма в области на плоскости задаёт поле направлений: в каждой точке нужно рассмотреть ядро соответствующей 1-формы — это прямая в касательном пространстве. Это поле направлений задано во всех точках, где 1-форма не равна нулю. Обратите внимание, что формы ω и $f\cdot\omega$ (где функция f не обращается в ноль) задают одно и то же поле направлений.

Итак, пусть по 1-форме $\omega = f\,dx + g\,dy$ построено поле направлений. Тогда интегральные кривые этого поля направлений задаются уравнением

$$f\,dx + g\,dy = 0. \tag{1}$$

Смысл этого уравнения в следующем: левая часть обращается в ноль на любом касательном векторе к интегральной кривой.

Уравнение (1) легко решается, если форма $\omega = f\,dx + g\,dy$ является *точной*, то есть в области D существует функция $F(x, y)$ (нужной степени гладкости) такая, что

$$\omega = dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Тогда уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах. Его решения — линии уровня функции F. Действительно, форма dF даёт на касательном векторе v производную функции F вдоль вектора v: берём гладкую кривую $\gamma(t)$ с вектором скорости при $t = 0$, равным v, и вычисляем

$$dF(v) = (d/dt)|_{t=0}F(\gamma(t)). \tag{2}$$

Но если v — касательный к линии уровня $\{F = c\}$, то в качестве кривой γ можно взять саму линию уровня $\{F = c\}$, так что дифференцировать в (2) нужно константу.

Замечание. В области, где $g(x,y) \neq 0$, кривые $F(x,y) = C$ есть семейство решений (интегральные кривые) уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

и в области, где $f(x,y) \neq 0$, они же дают семейство решений уравнения

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Как узнать, точна ли данная форма $\omega = f\,dx + g\,dy$ и, если точна, как найти $F(x,y)$?

Если форма ω точна, то $f = \partial F/\partial x$, $g = \partial F/\partial y$. Тогда из равенства смешанных вторых производных получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{3}$$

1-формы, удовлетворяющие этому условию $f_y = g_x$ называются *замкнутыми*. Мы показали, что всякая точная форма замкнута. Согласно лемме Пуанкаре, в односвязной области D верно и обратное: всякая замкнутая форма точна.

Метод поиска функции $F(x,y)$ проиллюстрируем на примерах.

Задача 6.1. $2x\cos^2\!y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$.

Решение. В данном примере функции f и g непрерывно дифференцируемы в любой области $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x\cos y\sin y = -2x\sin 2y,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x\sin 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Таким образом, форма точна. Для $F(x,y)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = f(x,y) = 2x\cos^2 y, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = g(x,y) = 2y - x^2\sin 2y. \end{cases}$$

Начинаем с любого из этих равенств.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\cos^2 y \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^2\cos^2 y + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная дифференцируемая функция переменной y. Выписанное выражение дает общий вид функции $F(x,y)$, удовлетворяющей первому равенству. Подберем $C(y)$ так, чтобы и второе равенство выполнилось:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2\cos y\sin y + \frac{dC}{dy} = g = 2y - x^2\sin 2y.$$

Таким образом, для функции $C(y)$ имеем уравнение:

$$\frac{dC}{dy} = 2y \quad \Rightarrow \quad C(y) = y^2 + C_0.$$

Функция $F(x,y)$ определена не однозначно, но эту константу можно включить в константу, задающую линию уровня. Итак:

$$F(x,y) = x^2\cos^2 y + y^2 + C_0.$$

Общее решение исходного уравнения — однопараметрическое семейство кривых в $\mathbb{R}^2$:

$$x^2\cos^2 y + y^2 = C.$$

◀

Задача 6.2. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)dy = 0, \quad x > 0.$

Замечание. Отметим, что точка $(1,0)$ — особая точка нашего уравнения. В этой точке $f(1,0) = g(1,0) = 0$ и дифференциальная форма тождественно равна нулю. Поэтому ее ядро совпадает со всем касательным пространством $T_{(1,0)}\mathbb{R}^2$ и, как следствие, в точке $(1,0)$ дифференциальная форма не задает никакого выделенного направления.

Решение. Необходимые условия точности выполнены:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + \ln x),$$

полуплоскость $x > 0$ — односвязна, следовательно наша дифференциальная форма точна. Ищем функцию $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad F = y\ln x + C(y).$$

Поскольку мы рассматриваем область $x > 0$, можно не писать $\ln|x|$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + C'(y) = y^3 + \ln x,$$

следовательно,

$$C(y) = \frac{y^4}{4} + C_0.$$

Итак, интегральные кривые нашего уравнения в области $x > 0$ образуют однопараметрическое семейство:

$$y(\ln x^4 + y^3) = C.$$

◀

Последний пример связан с нахождением условий точности дифференциальной формы.

Задача 6.3. Задано уравнение в дифференциалах, зависящее от вещественного параметра α:

$$y^2\left(\frac{1}{x} - y^{\alpha-1}\right)dx + 2y\left(1 + \ln\frac{1}{x^\alpha}\right)dy = 0, \quad x > 0.$$

Требуется найти значение параметра, при котором дифференциальная форма становится точной, и решить уравнение при этом значении параметра.

Решение. Для нахождения α требуем выполнения необходимого условия (3) точности формы:

$$\frac{2y}{x} - (\alpha+1)y^\alpha = -2\alpha\,\frac{y}{x}.$$

Это уравнение допускает единственное решение $\alpha = -1$. При таком значении α уравнение принимает вид:

$$\omega = \left(\frac{y^2}{x} - 1\right)dx + 2y\,(1 + \ln x)\,dy = 0, \quad x > 0.$$

В силу односвязности полуплоскости $x > 0$ необходимые условия точности являются и достаточными. Дифференциальная форма ω точна, а соответствующая функция $F(x,y)$ в данном случае легко получается выделением полных дифференциалов в левой части уравнения:

$$\omega = y^2\,d\ln x + \ln(x)\,2ydy + d(-x + y^2) = d(y^2\ln x - x + y^2).$$

Таким образом, семейство интегральных кривых нашего уравнения имеет вид:

$$y^2(1 + \ln x) - x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

◀