# ОДУ-2022. Семинар №7

(18/21 октября)

## Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

*Тема 1-форм оказалась сложной. Скорее всего, вы не успели разобрать все задачи из семинара 6. Начните с разбора пятиминутки, по вашему усмотрению можно разобрать ещё какую-либо задачу из прошлого семинара и/или следующий сюжет*

**Задача 7.1.** Пусть $\varphi(x, y)$ — полярный угол на $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Найдите $d\varphi$.

Здесь нужно пояснить, что полярный угол — функция неоднозначная, однако вся неоднозначность состоит в прибавлении константы $2\pi k$, а эта константа на дифференциал не влияет. Далее можно подсказать, что $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi n = \operatorname{arcctg}(x/y) + \pi m$.

Ответ: $d\varphi = \dfrac{x}{x^2+y^2}dy - \dfrac{y}{x^2+y^2}dx$.

**Задача 7.2.** Будет ли полученная форма $\omega = \dfrac{x}{x^2+y^2}dy - \dfrac{y}{x^2+y^2}dx$ замкнутой? точной?

*Решение.* Во-первых, $\omega$ замкнута. Это можно проверить непосредственно, а можно сказать, что в малой окрестности, не содержащей 0, можно выделить однозначную ветвь $\hat{\varphi}$ полярного угла, а тогда $\omega = d\hat{\varphi}$ будет замкнута (ведь условие замкнутости зависит лишь от значений функции в окрестности каждой точки).

Однако на всей проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ она не будет точной. Действительно, все решения уравнения уравнения $dF = \omega$ отличаются друг от друга на константу (обсудите, что уравнение $dF = 0$ имеет только постоянные решения). Значит, в каждом секторе с центром в нуле мы получаем, что $F = \hat{\varphi} + \mathrm{const}$ (где $\hat{\varphi}$ — однозначная ветвь полярного угла, а константа зависит от сектора и от выбора этой ветви).

Пусть, скажем $F(1, 0) = \alpha$. Рассматривая сектор-полуплоскость $x + y > 0$, получим $F(0, 1) = \alpha + \pi/2$, затем из сектора $y - x > 0$ получим $F(-1, 0) = \alpha + \pi$. Продолжая обходить ноль, в итоге получим $F(1, 0) = \alpha + 2\pi$, что и будет противоречием. ◀

**Задача 7.3.** Запишите пфаффово уравнение $\dfrac{x}{x^2+y^2}dy - \dfrac{y}{x^2+y^2}dx = 0$ обратно в виде дифференциального и найдите его интегральные кривые.

Обратите внимание, что несмотря на неоднозначность $\varphi$, интегральные кривые всё равно имеют вид $\varphi = C$ (это лучи с началом в нуле).

### Интегрирующий множитель

Как мы уже говорили в прошлый раз, 1-форма $\omega$ на плоскости задаёт поле направлений (в каждой точке рассматривается её ядро). При этом если умножить форму на функцию $M = M(x, y)$, поле направлений не изменится (в каждой точке функционал на касательном пространстве умножится на соответствующее число $M(x, y)$, так что его ядро не изменится).

На этом основан метод решения пфаффовых уравнений, называемый *методом интегрирующего множителя*: нужно подобрать функцию $M$ так, чтобы форма $M\omega$ стала замкнутой (а значит, точной). Общего алгоритма для этого нет: задача поиска интегрирующего множителя эквивалентна задаче решения самого дифференциального уравнения.

Рассмотрим самый простой случай, когда интегрирующий множитель зависит только от одной переменной: $M = M(x)$. Если $\omega = a(x, y)\,dx + b(x, y)\,dy$, условие замкнутости формы $M\omega$ примет вид

$$\frac{\partial(Ma)}{\partial y} = \frac{\partial(Mb)}{\partial x},$$

то есть

$$M\frac{\partial a}{\partial y} = M\frac{\partial b}{\partial x} + bM'(x).$$

Это условие имеет вид $M(x)f(x,y) = b(x,y)M'(x)$ или

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = \frac{f(x,y)}{b(x,y)}. \tag{1}$$

Значит, для существования такого интегрирующего множителя нужно, чтобы правая часть $f/b$ не зависела от $y$. Если это действительно так, то уравнение (1) можно решить (переменные разделяются), после чего решаем уравнение в полных дифференциалах $Ma\,dx + Mb\,dy = 0$.

**Задача 7.4.** Найти общее решение уравнения в дифференциалах:

$$\omega = (x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0.$$

*Решение.* Попробуем подобрать интегрирующий множитель в виде $M = M(x)$. Условие замкнутости имеет вид

$$M(x)(-1) = M'(x)(x^2y^2 + x) + M(x)(2xy^2 + 1),$$

то есть

$$-2\frac{xy^2+1}{x^2y^2+x} = \frac{M'(x)}{M(x)},$$

В левой части сокращается множитель $xy^2 + 1$:

$$\frac{-2}{x} = \frac{M'(x)}{M(x)},$$

Решаем это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dM}{M} = \frac{-2}{x}\,dx, \quad \ln|M| = -2\ln|x| + C, \quad M = C|x|^{-2}.$$

Константа $C$ не важна (она отвечает умножению формы на константу), возьмём $C = 1$ и подставим в исходное уравнение:

$$\frac{x^2-y}{x^2}\,dx + \frac{xy^2+1}{x}\,dy = 0.$$

Далее можно решать это уравнение в полных дифференциалах так же, как мы это делали на прошлом семинаре, но иногда можно попробовать собрать дифференциал просто посмотрев на форму:

$$\frac{x^2-y}{x^2}\,dx + \frac{xy^2+1}{x}\,dy = dx + y^2\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} =$$

$$= dx + d(y^3/3) + d(y/x) = d\left(x + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{x}\right).$$

Итак, решения нашего дифференциального уравнения — это линии уровня функции

$$F(x,y) = x + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{x}.$$

Эта функция не определена при $x = 0$. Однако при $x = 0$ и $y \neq 0$ форма $\omega$ пропорциональна форме $dx$, то есть поле направлений вертикально. Значит, лучи $\{x = 0, y > 0\}$, $\{x = 0, y < 0\}$ также будут решениями. ◀

## Комплексные числа: напоминание

*В следующем модуле мы начнём с линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Поэтому важно, чтобы студенты вспомнили про комплексные числа, экспоненту и т.д. Если на эту часть не будет хватать времени, настоятельно посоветуйте студентам прорешать эти задачи самостоятельно по выложенным на страницу курса запискам семинара.*

**Задача 7.5.** Вычислить: $i^{2022}$, $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2022}$.

**Задача 7.6.** Решить уравнения: $z^3 = 8$, $z^3 = -8$, $z^4 = -4$.

**Задача 7.7.** Выразите $\sin 3\varphi$ и $\cos 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, используя формулу Эйлера для комплексной экспоненты.

**Задача 7.8.** Рассмотрим отображение $z \mapsto e^z$. В какие кривые оно переводит:
(а) горизонтальные прямые; (б) вертикальные прямые; (в*) прямые общего вида?

**Задача 7.9.** Вспомним, что полярный угол — это мнимая часть логарифма комплексного числа. Выведите отсюда найденную нами в задаче 7.1 формулу для $d\varphi$.
(*Подсказка:* в комплексной области по-прежнему верна формула $d\ln z = (1/z)\,dz$.)