Set of problems 5
28.10.2022

1. Give an example of a (homogeneous) Markov chain which does not have a stationary state.

2. Is it true that any Markov chain with a finite number of states which has a unique stationary state is ergodic? If yes, prove this; otherwise give a counterexample.

3. Consider a random walk on the state space $\{1, \ldots, L\}$, given by the transition probabilities $p_{ii+1} = p$ and $p_{ii-1} = 1 - p$ for $2 \leq i \leq L - 1$, $p_{12} = a$, $p_{11} = 1 - a$ and $p_{LL-1} = b$, $p_{LL} = 1 - b$, for some $0 < p < 1$ and $0 < a, b \leq 1$, while $p_{ij} = 0$ for all other i, j.

   a) Prove that the corresponding transition probability matrix is mixing if and only if $a < 1$ or $b < 1$.

   b) Find all pairs $0 < a, b \leq 1$, for which the random walk is ergodic for every $0 < p < 1$.

   c) Find the stationary state for any a, b, p satisfying $0 < a, b \leq 1$ and $0 < p < 1$. [1] Is it unique? Are there a, b, p for which the stationary state is unique but the chain is not ergodic?

4. Let us consider the Ehrenfest model. Namely, we take N balls enumerated from 1 to N and two boxes, some of the balls are in the first box while the other are in the second. We randomly choose a number from 1 to N (with equal probabilities) and move the ball with the chosen number from the box where it is to another one. We are interested in the number of balls in each box. Of course, it is enough to know the number of balls in the first box; there are $N + 1$ possibilities, from 0 to N.

   (1) Prove that the Ehrenfest model defines a Markov chain with $N+1$ state (a state is the number of balls in the first box). Calculate the transition probabilities.

   (2) Find the steady state for the Ehrenfest model. [2] Is it unique?

   (3) Is the transition probability matrix mixing in the Ehrenfest model?

   (4) Is the Markov chain associated with the Ehrenfest model ergodic?

   The following problem gives an example of an ergodic chain whose transition probability matrix is not mixing. Take $L = 2$, draw the corresponding graph and remember it as the simplest example of such situation.

5. Consider a (homogeneous) Markov chain $\xi_0, \xi_1, \ldots$ with a finite state space $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, such that $p_{11} = 1$. Suppose that for each state $2 \leq i \leq L$ there exists $k_i \geq 1$ such that $p_{i1}^{(k_i)} > 0$, i.e. the probability of going from state i to state 1 in k_i steps is positive.

[1] The answer should not be beautiful.

[2] Here the answer is beautiful, as is often the case for problems coming from physics.

a) Show that the transition probability matrix of such Markov chain cannot be mixing.

b) Prove that the sequence $(p_{i1}^{(m)})_{m\geq 0}$ does not decrease.

c) Show that $\mathbb{P}(\xi_{mk} \neq 1) \leq (1-\delta)^m$ for any $m \geq 1$, where $k = \max_i k_i$ and $\delta = \min_i p_{i1}^{(k_i)} > 0$.

Now let us discuss the conclusions:

d) Show that $\mathbb{P}(\exists k \geq 0 : \ \xi_n = 1 \, \forall n \geq k) = 1$ (i.e. with probability one we arrive at state 1 and stay there forever.)

e) Show that the considered Markov chain is ergodic and $\pi = (1, 0, \ldots, 0)$ is the unique stationary state.

6. *Optional problem (complementing the previous one).* Consider the Markov chain $\xi_0, \xi_1, \ldots$, with the state space $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, such that $p_{11} = 1$ and $p_{22} = 1$. Assume that for each state $3 \leq i \leq L$ there exists $k_i \geq 1$ such that at least one of the probabilities $p_{i1}^{(k_i)}$ or $p_{i2}^{(k_i)}$ is positive. Show that such Markov chain cannot be ergodic. Prove that

$$\mathbb{P}(\exists k \geq 0 : \ \xi_n = 1 \, \forall n \geq k \text{ or } \xi_n = 2 \, \forall n \geq k) = 1$$

(i.e., depending on the starting point, we arrive either to state 1 or to state 2)

On the Ehrenfest model (in Russian, sorry for that).

Модель Эренфестов – известная ранняя стохастическая модель в статистической механике. Статистическая механика (=статистическая физика) ставит своей целью объяснить поведение макроскопических систем с точки зрения микроскопической динамики частиц. Например, динамику газа с точки зрения динамики молекул.

Статистическая механика задает, например, такие вопросы. Почему газ, изначально собранный в одной половине комнаты, распространится по всей комнате и уже никогда не вернется в ту половину, где он был изначально? Ведь согласно теореме Пуанкаре о возвращении [3] это должно произойти (но тут ответ простой: время, которое придется ждать, чтобы это произошло, больше времени существования вселенной). А вот гораздо более сложный, *до сих пор открытый вопрос* (грубо говоря, это называется "эргодическая гипотеза"): почему газ равномерно заполнит обе половины комнаты, и если температура газа в начальный момент времени была распределена неоднородно, то со временем она выровняется?

Модель Эренфестов – простейшая модель, чтобы изучать "равномерное заполнение газом комнаты". Кстати говоря, как наверное вы увидите из рассмотренных задач, эта модель не очень хороша: она не обладает свойством сходимости к равновесию (эргодичности), так что "равномерного заполнения комнаты"и "выравнивания температуры" не происходит (хотя "почти" происходит). Более подробно на доступном языке о модели Эренфестов можно почитать в книге М.Кац, "Вероятность и

[3] См. Википедию, а лучше, к примеру, В.И. Арнольд, "Математические методы классической механики".

смежные вопросы в физике". Речь о том, почему вообще вероятностные модели появляются в физике и почему они хороши. В первом приближении тут такое правило: чем больше в модели стохастики, тем проще она для строгого анализа, но тем дальше она от жизни (реальные молекулы не прыгают случайно из одной половины комнаты в другую). Однако, согласно современному пониманию статистической физики, какую-то случайность в систему все равно нужно вводить, иначе (а) не получится провести никакого строгого анализа (б) ее поведение далеко не всегда будет соответствовать нашим физическим ожиданиям. [4]

Тем, кому интересно, очень порекомендую научно-популярную книгу Д.Рюэль, "Случайность и хаос— сравнительно коротко и классно о том же, на популярном языке, от одного из известнейших статистических физиков 20-го и 21-го веков.

[4] Насколько я знаю, когда делается прогноз погоды, в уравнения метеорологии добавляется случайный шум: так результат оказывается лучше.