Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать мне на почту artamkin@mail.ru , ДО УТРА СРЕДЫ перед следующим занятием.

Задания с 5 занятия.

На прошедшей лекции для многих утверждений были рассказаны лишь наброски доказательств. Почти все такие утверждения собраны в этом списке, их можно будет обсудить на следующем занятии. Но ПРОСЬБА ПРИСЫЛАТЬ на проверку НЕ БОЛЕЕ ТРЕХ из этих задач — те, которые покажутся наиболее значимыми и интересными.

(1) Пусть X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, заданная однородным уравнением $F(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = 0$ степени d. Полярой степени k относительно точки $a \in \mathbb{P}^n$ называется гиперповерхность $P_a^k X$ степени $d-k$, заданная уравнением $D_a^k F(x) = 0$, где $D_a = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Покажите, что гиперплоскость $P_a^{d-1}X$ и квадрика $P_a^{d-2}X$ задаются, соответственно, уравнениями $\sum x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$ и $\sum x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = 0$. (Из этого следует, что если $a \in X$, то $P_a^{d-1}X$ это касательная гиперплоскость к X в точке a.)

(2) (Повторение 1 курса.)

(a) Покажите, что проективная инволюция на $\mathbb{P}^1$ всегда имеет две неподвижные точки и однозначно ими задается.

(b) Покажите, что двойное отношение четырех различных точек на проективной прямой $(A, B, C, D) = -1$ тогда и только тогда, когда существует такая проективная инволюция $\sigma : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, что точки A и B неподвижны (т.е. $\sigma(A) = A$ и $\sigma(B) = B$), а точки C и D меняются местами, (т.е. $\sigma(C) = D$). В таком случае говорят, что пара точек A и B гармонически делит пару точек C и D.

(c) На проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ даны прямая l и точка A вне ее. Задайте в подходящих координатах формулой инволюцию σ, определенную следующим образом: если $B \notin l$ и отлична от A, а C это точка пересечения прямых l и AB, то $\sigma(B)$ это такая точка D, что пара точек A и C гармонически делит пару точек B и D.

(3) Пусть X — неособая квадрика в $\mathbb{P}^n$, точка A лежит вне X, l — прямая, проходящая через точку A и пересекающая квадрику X в точках B и C и гиперплоскость $P_A X$ в точке D. Докажите, что либо $B = C = D$ (и тогда l касается X в этой точке), либо эти точки все различны и пара точек A и D гармонически делит пару точек B и C (т.е. двойное отношение $(A, B, C, D) = -1$).

(4) Пусть X — кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, точка $A \in X$ неособа на X, l — прямая, проходящая через точку A и пересекающая кубику X в точках A, B и C и квадрику $P_A X$ в точках A и D. Докажите, что если прямая l не является общей касательной к X и ее поляре $P_A X$ (на лекции объяснялось, почему у них в точке A общая касательная), то либо $B = C = D$ (т.е. прямая l касается кубики X в точке пересечения ее с ее полярой), либо же точки A, B, C и D все различны, и тогда пара точек A и D гармонически делит пару точек B и C (т.е. двойное отношение $(A, B, C, D) = -1$). [На лекции задача давалась для кривой на плоскости, но решение для произвольной размерности ровно такое же. Подсказка: сведите задачу к одномерной (т.е. $n = 1$), показав что операции взятия поляры и ограничения на проективное подпространство перестановочны.]

(5) Системой Штейнера называется пара $(Z, \mathcal{L})$, где Z — конечное множество, а $\mathcal{L} \subset 2^Z$, такое что $\forall\ L \in \mathcal{L}\ |L| = 3$ и $\forall\ A, B \in Z$ $(A \neq B)$, $\exists$ единственное $L \in \mathcal{L}$, такое что $A, B \in L$. [Трехэлементные множества из $\mathcal{L}$ естественно интерпретировать как "прямые", проходящие через точки Z. На лекции мы доказали, что множество точек перегиба неособой кубической кривой является системой Штейнера.] Докажите, что число точек в любой системе Штейнера при делении на 6 может давать остатки только 1 и 3.

(6) Докажите, что системы Штейнера из 7 и 9 точек изоморфны, соответственно, $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ и $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.

(7) Докажите, что любые две системы Штейнера из 9 точек на проективной плоскости ("прямые" — это настоящие прямые) проективно эквивалентны, т.е. переводятся друг в друга проективным преобразованием плоскости.

(8) Остаются части (c) и (d) задачи 1 из очень старого списка про особые кубики.