ОДУ-2022. Семинар №8

(1 ноября)

Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t), \tag{1}$$

коэффициенты a_j которого не зависят от времени.

Для его решения рассмотрим левую часть как результат применения дифференциального оператора L к неизвестной функции $x(t)$. Обозначим за D дифференциальный оператор d/dt, тогда уравнение примет вид

$$Lx := (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I)x = f. \tag{2}$$

(I — тождественный оператор.) Стоящий в левой части дифференциальный оператор — многочлен от D. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* уравнения:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Разложим его на линейные множители:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{d_k}.$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — корни характеристического многочлена, $d_1, \dots, d_k$ — их кратности.

Подставим это выражение в (2):

$$(D - \lambda_1 I)^{d_1} \dots (D - \lambda_k I)^{d_k} x = f. \tag{3}$$

Отметим, что замена Lx на $(D - \lambda_1 I)^{d_1} \dots (D - \lambda_k I)^{d_k} x$ возможна только в случае постоянных коэффициентов a_j. Если a_j были бы функциями от t (а тогда λ_j также были бы функциями времени), это было бы неверно: умножение на функцию и применение D не коммутируют, а потому «раскрыть скобки» в правой части не получится.

Задача 8.1. Раскройте скобки в выражении $(D - a(t)I)(D - b(t)I)x(t)$.

Решение. $\dots = (D - a(t)I)(\dot{x} - bx) = \ddot{x} - \dot{b}x - b\dot{x} - a\dot{x} - abx = \ddot{x} - (a+b)\dot{x} + abx - \dot{b}x$. Таким образом, по сравнению с «наивным» раскрытием скобок появляется дополнительный член $-\dot{b}x$. ◀

Однородное уравнение

Решить уравнение (3) с $f = 0$ (однородное линейное уравнение) помогает следующее понятие *квазимногочлена*: квазимногочленом называется выражение вида $Y(t) = Q(t)e^{\mu t}$, где Q — многочлен (*степенью* квазимногочлена Y называется $\deg Q$), а $\mu \in \mathbb{C}$ называется показателем квазимногочлена.

Задача 8.2. Рассмотрим оператор $\tilde{L} = D - \lambda I$. Докажите, что $\tilde{L}$ переводит квазимногочлен $Q(t)e^{\mu t}$ в квазимногочлен той же степени, если $\lambda \neq \mu$, и в многочлен степени ровно на единицу меньше, если $\lambda = \mu$. (Куда переходят квазимногочлены нулевой степени?)

)exp(mt)

Решение. $\tilde{L}(Q(t)e^{\mu t}) = ((\mu - \lambda)Q(t) + \dot{Q}(t)$. Если $\mu - \lambda \neq 0$, то степень второго члена на единицу меньше, чем первого, поэтому степень суммы равна $\deg Q$, в противном случае остаётся только $\dot{Q}(t)$, степень которого на единицу равна $\deg Q - 1$ (а если $\deg Q = 0$, то $\dot{Q} = 0$). ◀

Попробуем подобрать квазимногочлены, являющиеся решениями (3) с $f = 0$. Пусть $x(t) = Q(t)e^{\mu t}$, тогда каждая скобка $(D - \lambda_j I)$ с $\mu \neq \lambda_j$ не будет менять степень квазимногочлена, а скобка с $\lambda_j = \mu$ понизит её на единицу. Значит, если $\mu = \lambda_s$, а $\deg Q \leq d_s - 1$, то применение всех сомножителей в (3) переведёт $x(t) = Q(t)e^{\mu t}$ в нуль.

Итак, решения линейного однородного уравнения

$$(D - \lambda_1 I)^{d_1} \dots (D - \lambda_k I)^{d_k} x = 0$$

имеют вид

$$x(t) = (c_{1,0} + c_{1,1}t + \dots + c_{1,d_1-1}t^{d_1-1})e^{\lambda_1 t} + \dots + (c_{k,0} + c_{k,1}t + \dots + c_{k,d_k-1}t^{d_k-1})e^{\lambda_k t} \qquad (4)$$

с произвольными константами $c_{i,j}$. Общее число этих констант равно $d_1 + \dots + d_k = n$, так что если мы докажем, что функции $t^j e^{\lambda_i t}$ линейно независимы, эта формула задаёт n-мерное пространство функций, являющихся решением данного уравнения. Но всё пространство решений n-мерно (почему?), поэтому (4) задаёт все его решения.

Линейную независимость функций $t^j e^{\lambda_i t}$ мы обсудим позже. Разберём пример решения такого уравнения.

Задача 8.3. Решите уравнение $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = 0$, $\alpha \geq 0$ — вещественный параметр, и опишите поведение его решений при $t \to +\infty$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Значит, если $\alpha > 1$, оба корня вещественны и отрицательны (почему?), а тогда общее решение $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ экспоненциально убывает с ростом t.

Если $\alpha \in [0, 1)$, то $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\beta$. Общее решение имеет вид $x(t) = (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t})e^{-\alpha t}$. Заметим, что функции $(e^{i\beta t}, e^{-i\beta t})$ линейно выражаются через функции $(\cos\beta t, \sin\beta t)$ и обратно, поэтому можно записать общий вид решения как $x(t) = (A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)e^{-\alpha t}$. Выражение в скобках можно преобразовать как $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(\beta(t - t_0))$, поэтому поведение решения можно описать как затухающие с течением времени синусоидальные колебания.

Наконец, при $\alpha = 1$ получаем $\lambda_{1,2} = -1$. Соответственно, общий вид решения $(C_1 + C_2 t)e^{-t}$, такое решение также стремится к нулю при $t \to +\infty$ (и, как можно проверить, имеет не более одного экстремума, в отличие от предыдущего случая). ◀

Пропустите эту задачу, если времени будет не хватать. Вернёмся к обоснованию линейной независимости функций $t^i e^{\lambda_j t}$.

Задача 8.4. Пусть функция $Y(t) = \sum_{j=1}^{k} Q_j(t)e^{\lambda_j t}$ тождественно равна нулю. Примените к ней оператор $L = \prod_{j=1}^{k-1}(D - \lambda_j I)^{d_j}$, где $d_j = \deg Q_j + 1$, и докажите, что Q_k — нулевой многочлен.

Решение. Поскольку $Y \equiv 0$, то и $LY \equiv 0$. С другой стороны, $L(Q_j(t)e^{\lambda_j t}) = 0$ при $j < k$, а $L(Q_k(t)e^{\lambda_k t}) = R(t)e^{\lambda_k t}$, где R — многочлен той же степени, что и Q_k. Значит, $LY = R(t)e^{\lambda_k t} \equiv 0$. Экспонента в нуль не обращается, а многочлен $R(t)$ (если он не нулевой) имеет лишь конечное число корней. Следовательно, R (а значит, и Q_k) — нулевые многочлены. ◀

Таким образом, если бы существовала тождественно равная нулю линейная комбинация $Y(t)$ функций вида $t^i e^{\lambda t}$, её слагаемые с одинаковыми λ можно было бы сгруппировать в квазимногочлены. Тогда по предыдущей задаче последний из квазимногочленов нулевой. Но их нумерация произвольна, поэтому они все нулевые.

Неоднородное уравнение с квазимногочленом в правой части

Те же соображения, что и для решения однородного уравнения, позволяют решить неоднородное уравнение, в правой части которого стоит квазимногочлен (или сумма нескольких квазимногочленов). Рассмотрим уравнение

$$(D - \lambda_1 I)^{d_1} \dots (D - \lambda_k I)^{d_k} x = Q(t)e^{\mu t}.$$

и будем подбирать решение в виде $x(t) = R(t)e^{\mu t}$. Как и раньше, получим, что

$$(D - \lambda_1 I)^{d_1} \dots (D - \lambda_k I)^{d_k}(R(t)e^{\mu t}) = S(t)e^{\mu t},$$

где $\deg S = \deg R - d$, а d — кратность корня μ в характеристическом многочлене: $d = 0$, если $P(\mu) \neq 0$, и $d = d_j$, есди $\mu = \lambda_j$. Итак, искомый многочлен R должен иметь степень $m + d$, где $m = \deg Q$. Далее мы ищем частное решение по методу неопределённых коэффициентов.

Обоснование, почему подобрать коэффициенты можно, скорее всего, придётся опустить. Привожу его для полноты изложения. Заметим, что отображение $\Phi\colon (r_0, \dots, r_{m+d}) \mapsto (s_0, \dots, s_m)$ коэффициентов многочлена R в коэффициенты многочлена S линейно, а его ядро состоит из векторов вида $(r_0, \dots, r_{d-1}, 0, 0, \dots, 0)$ (это опять утверждение про изменение степени квазимногочлена при применении оператора L). Значит, размерность образа равна $(m+d+1) - \dim\ker\Phi = m+1$, а следовательно, Φ — эпиморфизм, то есть уравнение $\Phi(r_0, \dots, r_{m+d}) = (q_0, \dots, q_m)$ всегда решается. Более того, при решении можно выбрать удобные (например, нулевые) значения $r_0, \dots, r_{d-1}$ — они отвечают решениям однородного уравнения.

Задача 8.5. Решите уравнение $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t} + \sin t$.

Решение. Общее решение однородного уравнения $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$ мы нашли выше. В правой части стоит сумма трёх квазимногочленов с показателями $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = i$, $\mu_3 = -i$, и можно частное решение получить как сумму частных решений уравнений, в правой части которых оставлен только один квазимногочлен: te^{-t}, $e^{it}/2i$ или $-e^{-it}/2i$.

Начнём со второго и третьего случая: $\mu_{2,3} = \pm i$ не является корнем характеристического многочлена $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$. Значит, частное решение уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \sin t$ надо искать в виде $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$. Если не выходить в комплексную область, можно вместо этого искать его в виде $x(t) = A\cos t + B\sin t$. Подставляя это в уравнение, получаем $-2A\sin t + 2B\cos t = \sin t$, то есть $A = -1/2$, $B = 0$, $x_{\text{част.},23}(t) = -(1/2)\cos t$.

В первом случае $\mu_1 = -1$ имеет кратность 2, поэтому решение нужно искать в виде квазимногочлена третьей степени $x(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct + D)e^{-t}$. Но мы знаем, что $(Ct+D)e^{-t}$ — это решения однородного уравнения, поэтому при подстановке $x(t)$ в уравнение $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t}$ члены с C и D заведомо сократятся. Мы можем поэтому искать частное решение вида $x(t) = (At^3 + Bt^2)e^{-t}$. Подставлять его удобно с помощью формулы Лейбница для старших производных, например, для второй производной

$$\frac{d^2}{dt^2}(fg) = \ddot{f}g + 2\dot{f}\dot{g} + f\ddot{g},$$

где за f мы берём полином, а за g — e^{-t}. Итак,

$$(6At + 2B - 2(3At^2 + 2Bt) + At^3 + Bt^2)e^{-t} + 2((3At^2 + 2Bt) - (At^3 + Bt^2))e^{-t} + (At^3 + Bt^2)e^{-t} = te^{-t}.$$

Члены с t^3 и t^2 сокращаются (так и должно быть — применение нашего дифференциального оператора должно понизить степень на два), окончательно остаётся $6At + 2B = t$, то есть $x_{\text{част.},1}(t) = (t^3/6)e^{-t}$. Окончательно получаем, что общее решение имеет вид

$$x(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + (C_1 t + C_2)e^{-t}.$$

◀