

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2022
ЛИСТОК 5

1. а) Проверьте, что оператор Лапласа на плоскости $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ в полярных координатах (r, φ) ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

б) Проверьте, что оператор Лапласа в пространстве $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ в сферических координатах (r, θ, φ) ($x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi},$$

где

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

2. Докажите рекуррентные соотношения для функций Бесселя:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_{\nu}(x).$$

3. Докажите тождества ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{\sin x}{x},$$

$$J_{-m-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{\cos x}{x}.$$

4. Докажите интегральное представление для функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \varphi + in\varphi} d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Вычислите интегралы

а) $\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(x) dx$, $a > 0$; б) $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{\nu+1} J_{\nu}(x) dx$, $a > 0$, $\nu \geq 0$.

6. Найдите главный член асимптотики функций Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$ при $x \rightarrow +0$.