Критические точки функций

факультет математики ВШЭ, осень 2022

Письменное домашнее задание

1. Рассмотрим поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $z = x^2 + y^2 + x^2 y$. Обозначим чрез $f_t : S \to \mathbb{R}$ функцию на S, заданную как квадрат расстояния от точки на поверхности до точки $(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3$. Определите тип критической точки этой функции в начале координат для раличных значений параметра t.

2. Определите тип особенностей в начале координат функций
(а) $f(x, y) = x^6 + xy^2 - t^2 x^5 + \left(t^2 x^2 + ty\right)^2$;
(б) $f(x, y) = \left(xy - 4t^2 y + tx^2\right)\left(x^2 - 4ty\right) + y^3$
для различных значений параметра t. Какие примыкания особенностей реализуют эти семейства?

3. Вычислите число Милнора для следующих особенностей функций двух переменных:
(а) $f(x, y) = a_0 x^5 + a_1 x^4 y + \cdots + a_5 y^5$ для общих значений параметров $a_0, a_1, \ldots, a_5$;
(б) $f(x, y) = x^5 + y^5 + x\,y$.

4. Опишите минимальное разрешение изолированной особенности в начале координат поверхности в $\mathbb{C}^3$, заданной уравнением $x^3 + xy^3 + z^2 = 0$. Скколько раздудий и в каких точках необходимо совершить? Покажите, что каждая неприводимая компонента исключительного дивизора разрешения рациональна, т.е. изоморфна $\mathbb{C}P^1$. Изобразите граф пересечений этих компонент.