Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Соотношение удаления-стягивания можно рассматривать не только как способ вычисления инвариантов графов и вложенных графов, но и как способ их построения: любой такой инвариант является результатом подстановки специальных значений в универсальный инвариант Татта. В этой лекции мы обсудим еще один способ построения инвариантов графов, вложенных графов и дельта-матроидов. Этот способ основан на алгебраической структуре, называемой алгеброй Хопфа.

Лекция 7. Симметризованный хроматический многочлен Стенли

Соотношение удаления-стягивания можно рассматривать не только как способ вычисления инвариантов графов и вложенных графов, но и как способ их построения: любой такой инвариант является результатом подстановки специальных значений в универсальный инвариант Татта. В этой лекции мы обсудим еще один способ построения инвариантов графов, вложенных графов и дельта-матроидов. Этот способ основан на алгебраической структуре, называемой алгеброй Хопфа.

Первым примером инварианта нового типа для нас будет служить симметризованный хроматический многочлен Стенли (хотя, как мы увидим позднее, его можно рассматривать и как инвариант, удовлетворяющий соотношению удаления-стягивания — однако не для графов, а для графов с взвешенными вершинами).

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество. Назовем *раскраской* вершин данного простого графа G отображение $\varphi : V(G) \to X$ множества его вершин $V(G)$ в X. Раскраска называется *правильной*, если любые две соседние вершины отображаются в различные элементы множества X (окрашены в различные цвета).

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество. Назовем *раскраской* вершин данного простого графа G отображение $\varphi : V(G) \to X$ множества его вершин $V(G)$ в X. Раскраска называется *правильной*, если любые две соседние вершины отображаются в различные элементы множества X (окрашены в различные цвета).
Каждой раскраске $\varphi : V(G) \to X$ множества вершин графа G сопоставляется моном $c_\varphi = \prod_{v \in V(G)} \varphi(v)$ от переменных X.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество. Назовем *раскраской* вершин данного простого графа G отображение $\varphi : V(G) \to X$ множества его вершин $V(G)$ в X. Раскраска называется *правильной*, если любые две соседние вершины отображаются в различные элементы множества X (окрашены в различные цвета).
Каждой раскраске $\varphi : V(G) \to X$ множества вершин графа G сопоставляется моном $c_\varphi = \prod_{v\in V(G)} \varphi(v)$ от переменных X.

Definition

Симметризованным хроматическим многочленом Стенли простого графа G называется многочлен от бесконечного набора переменных X

$$S_G(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{\varphi : V(G)\to X \\ \varphi \text{ правильная}}} c_\varphi,$$

где суммирование в правой части идет по всем правильным раскраскам множества вершин графа G.

Пример. Вычислим многочлен Стенли графа K_2 — полного графа на 2 вершинах. Мы должны покрасить эти две вершины в различные цвета, поэтому

$$S_{K_2}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

Пример. Вычислим многочлен Стенли графа K_2 — полного графа на 2 вершинах. Мы должны покрасить эти две вершины в различные цвета, поэтому

$$S_{K_2}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

Пример. Вычислим многочлен Стенли графа A_3 — цепочки на 3 вершинах. Для этого графа

$$S_{A_3}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \neq j, j \neq k} x_i x_j x_k.$$

Пример. Вычислим многочлен Стенли графа K_2 — полного графа на 2 вершинах. Мы должны покрасить эти две вершины в различные цвета, поэтому

$$S_{K_2}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

Пример. Вычислим многочлен Стенли графа A_3 — цепочки на 3 вершинах. Для этого графа

$$S_{A_3}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \neq j, j \neq k} x_i x_j x_k.$$

Очевидно, что многочлен Стенли $S_G(x_1, x_2, \dots)$ является однородным симметрическим многочленом, степень которого равна $|V(G)|$ — количеству вершин в G.

Лекция 7. Многочлен Стенли — выражение через суммы степеней

Пользоваться выражением многочлена Стенли через переменные $x_1, x_2, \dots$ неудобно — он представляет собой бесконечную сумму мономов. Хотелось бы иметь для него более простое выражение. Такое выражение можно получить, воспользовавшись тем, что многочлен Стенли симметричен — перестановка переменных $x_i \leftrightarrow x_j$ его не меняет.

Пользоваться выражением многочлена Стенли через переменные $x_1, x_2, \dots$ неудобно — он представляет собой бесконечную сумму мономов. Хотелось бы иметь для него более простое выражение. Такое выражение можно получить, воспользовавшись тем, что многочлен Стенли симметричен — перестановка переменных $x_i \leftrightarrow x_j$ его не меняет.

Для представлений симметричных многочленов — в том числе и от бесконечного семейства переменных — удобно раскладывать их по тем или иным базисам в пространстве симметричных многочленов. Для нас удобнее всего будет базис, состоящий из сумм степеней переменных X:

$$\begin{aligned}
p_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots; \\
p_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots; \\
\dots &= \dots; \\
p_k &= x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots; \\
\dots &= \dots .
\end{aligned}$$

В отличие от случая переменных X, в переменных $p_1, p_2, \dots$ многочлен Стенли является конечной суммой мономов.

Example

Выразим многочлен Стенли $S_{K_2}(x_1, x_2, \dots)$ через переменные $p_1, p_2, \dots$:

В отличие от случая переменных X, в переменных $p_1, p_2, \dots$ многочлен Стенли является конечной суммой мономов.

Example

Выразим многочлен Стенли $S_{K_2}(x_1, x_2, \dots)$ через переменные $p_1, p_2, \dots$:

$$S_{K_2}(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i \neq j} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = p_1^2 - p_2.$$

В отличие от случая переменных X, в переменных $p_1, p_2, \ldots$ многочлен Стенли является конечной суммой мономов.

Example

Выразим многочлен Стенли $S_{K_2}(x_1, x_2, \ldots)$ через переменные $p_1, p_2, \ldots$:

$$S_{K_2}(p_1, p_2, \ldots) = \sum_{i \neq j} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = p_1^2 - p_2.$$

Example

Выразим многочлен Стенли $S_{A_3}(x_1, x_2, \ldots)$ через переменные $p_1, p_2, \ldots$:

В отличие от случая переменных X, в переменных $p_1, p_2, \dots$ многочлен Стенли является конечной суммой мономов.

Example

Выразим многочлен Стенли $S_{K_2}(x_1, x_2, \dots)$ через переменные $p_1, p_2, \dots$:

$$S_{K_2}(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i \neq j} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = p_1^2 - p_2.$$

Example

Выразим многочлен Стенли $S_{A_3}(x_1, x_2, \dots)$ через переменные $p_1, p_2, \dots$:

$$S_{A_2}(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^3 - 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right) \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \sum_{i=1}^{\infty} x_i^3 = p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3.$$

Theorem

Многочлен Стенли $S_G(p_1, p_2, \dots)$ *является квазиоднородным многочленом степени* $|V(G)|$ *от переменных* p_i*, где степень переменной* p_i*,* $i = 1, 2, 3, \dots,$ *полагается равной* i.

Theorem

Многочлен Стенли $S_G(p_1, p_2, \dots)$ *является квазиоднородным многочленом степени* $|V(G)|$ *от переменных* p_i*, где степень переменной* p_i*,* $i = 1, 2, 3, \dots,$ *полагается равной* i*.*

Theorem

При подстановке $p_i = c$ *для* $i = 1, 2, \dots$ *симметризованный хроматический многочлен Стенли переходит в хроматический многочлен,*

$$S_G(c, c, c, \dots) = \chi_G(c).$$

Theorem

Многочлен Стенли $S_G(p_1, p_2, \dots)$ является квазиоднородным многочленом степени $|V(G)|$ от переменных p_i, где степень переменной p_i, $i = 1, 2, 3, \dots$, полагается равной i.

Theorem

При подстановке $p_i = c$ для $i = 1, 2, \dots$ симметризованный хроматический многочлен Стенли переходит в хроматический многочлен,

$$S_G(c, c, c, \dots) = \chi_G(c).$$

Доказательство. Чтобы подсчитать количество правильных раскрасок множества вершин графа G в c цветов, достаточно вычислить значение многочлена $S_G(x_1, x_2, \dots)$ при подстановке значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_c$ равными 1, а значений переменных $x_{c+1}, x_{c+2}, \dots$ равными 0. При такой подстановке каждая из переменных $p_1, p_2, \dots$ становится равной c, что и доказывает теорему. $\square$

Большинство встречаемых нами инвариантов графов мультипликативны — значение такого инварианта на несвязном объединении двух графов $G_1 \sqcup G_2$ является произведением его значений на G_1 и G_2. Это свойство инвариантов подсказывает мысль рассматривать несвязное объединение графов как их произведение (Татт, 1949).

Большинство встречаемых нами инвариантов графов мультипликативны — значение такого инварианта на несвязном объединении двух графов $G_1 \sqcup G_2$ является произведением его значений на G_1 и G_2. Это свойство инвариантов подсказывает мысль рассматривать несвязное объединение графов как их произведение (Татт, 1949).

Обозначим через $\mathcal{G}_k$ векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, порожденное простыми графами с k вершинами. *Алгеброй графов* называется (бесконечномерное) векторное пространство

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots,$$

с умножением $m : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, индуцированным несвязным объединением графов.

Лекция 7. Алгебра графов

Большинство встречаемых нами инвариантов графов мультипликативны — значение такого инварианта на несвязном объединении двух графов $G_1 \sqcup G_2$ является произведением его значений на G_1 и G_2. Это свойство инвариантов подсказывает мысль рассматривать несвязное объединение графов как их произведение (Татт, 1949).

Обозначим через $\mathcal{G}_k$ векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, порожденное простыми графами с k вершинами. *Алгеброй графов* называется (бесконечномерное) векторное пространство

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots,$$

с умножением $m : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, индуцированным несвязным объединением графов.

Умножение m *градуировано* в том смысле, что оно уважает градуировку пространств графов, $m : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_\ell \to \mathcal{G}_{k+\ell}$.

Лекция 7. Алгебра графов

Большинство встречаемых нами инвариантов графов мультипликативны — значение такого инварианта на несвязном объединении двух графов $G_1 \sqcup G_2$ является произведением его значений на G_1 и G_2. Это свойство инвариантов подсказывает мысль рассматривать несвязное объединение графов как их произведение (Татт, 1949).

Обозначим через $\mathcal{G}_k$ векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, порожденное простыми графами с k вершинами. *Алгеброй графов* называется (бесконечномерное) векторное пространство

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots,$$

с умножением $m : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, индуцированным несвязным объединением графов.

Умножение *m градуировано* в том смысле, что оно уважает градуировку пространств графов, $m : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_\ell \to \mathcal{G}_{k+\ell}$.

Всякий мультипликативный полиномиальный инвариант графов продолжается по линейности до гомоморфизма алгебры графов в алгебру многочленов.

Алгебра графов $\mathcal{G}$ является коммутативной градуированной алгеброй. Вообще говоря, такие алгебры могут быть устроены довольно сложно. Так, например, выглядит координатное кольцо любого аффинного алгебраического многообразия. Его структура отражает геометрию многообразия.

Алгебра графов $\mathcal{G}$ является коммутативной градуированной алгеброй. Вообще говоря, такие алгебры могут быть устроены довольно сложно. Так, например, выглядит координатное кольцо любого аффинного алгебраического многообразия. Его структура отражает геометрию многообразия.

Напротив, алгебра графов G устроена очень просто: она изоморфна алгебре многочленов (хотя и от бесконечного числа переменных). Причина этого в том, что на этой алгебре есть дополнительная структура — на ней можно ввести операцию коумножения, которая превращает ее в алгебру Хопфа.

Definition

Набор данных $(H, m, \mu, e, \epsilon, S)$, в котором

- H — векторное пространство;
- $m : H \otimes H \to H$ — умножение с единицей $e : \mathbb{C} \to H$;
- $\mu : H \to H \otimes H$ — коумножение с коединицей $\epsilon : H \to \mathbb{C}$;
- $S : H \to H$ — линейное отображение;

называется *алгеброй Хопфа*, если

1. умножение m является гомоморфизмом коалгебр;
2. коумножение μ является гомоморфизмом алгебр;
3. отображение S удовлетворяет соотношениям $m \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \mu = \eta \circ \epsilon = m \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \mu$.

Отображение S в алгебре Хопфа называется *антиподом*.

Алгебру графов можно превратить в алгебру Хопфа, введя ней коумножение $\mu : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ следующим образом:

$$\mu : G \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(G)} G|_U \otimes G|_W$$

для простого графа G; на линейные комбинации графов μ продолжается по линейности.

Алгебру графов можно превратить в алгебру Хопфа, введя ней коумножение $\mu : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ следующим образом:

$$\mu : G \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(G)} G|_U \otimes G|_W$$

для простого графа G; на линейные комбинации графов μ продолжается по линейности.

Задача. Проверьте, что а) коумножение уважает градуировку в $\mathcal{G}$, т.е. $\mu : \mathcal{G}_n \to \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_{n-k}$; б) коумножение является гомоморфизмом алгебр; в) умножение является гомоморфизмом коалгебр.

Алгебру графов можно превратить в алгебру Хопфа, введя ней коумножение $\mu : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ следующим образом:

$$\mu : G \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(G)} G|_U \otimes G|_W$$

для простого графа G; на линейные комбинации графов μ продолжается по линейности.

Задача. Проверьте, что а) коумножение уважает градуировку в $\mathcal{G}$, т.е. $\mu : \mathcal{G}_n \to \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_{n-k}$; б) коумножение является гомоморфизмом алгебр; в) умножение является гомоморфизмом коалгебр.
Задача. Что является единицей и коединицей в $\mathcal{G}$?

Алгебру графов можно превратить в алгебру Хопфа, введя ней коумножение $\mu : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ следующим образом:

$$\mu : G \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(G)} G|_U \otimes G|_W$$

для простого графа G; на линейные комбинации графов μ продолжается по линейности.

Задача. Проверьте, что а) коумножение уважает градуировку в $\mathcal{G}$, т.е. $\mu : \mathcal{G}_n \to \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_{n-k}$; б) коумножение является гомоморфизмом алгебр; в) умножение является гомоморфизмом коалгебр.
Задача. Что является единицей и коединицей в $\mathcal{G}$?

Устройство антипода S мы обсудим позднее.

Обозначим через $P=\mathbb{C}[c]$ алгебру многочленов от одной переменной. Ее можно превратить в алгебру Хопфа, положив $\mu(c)=1\otimes c+c\otimes 1$ и продолжив μ до гомоморфизма алгебр $\mu:P\to P\otimes P$.

Обозначим через $P = \mathbb{C}[c]$ алгебру многочленов от одной переменной. Ее можно превратить в алгебру Хопфа, положив $\mu(c) = 1 \otimes c + c \otimes 1$ и продолжив μ до гомоморфизма алгебр $\mu : P \to P \otimes P$.

Задача. Чему равно значение μ на мономе c^n?

Обозначим через $P = \mathbb{C}[c]$ алгебру многочленов от одной переменной. Ее можно превратить в алгебру Хопфа, положив $\mu(c) = 1 \otimes c + c \otimes 1$ и продолжив μ до гомоморфизма алгебр $\mu : P \to P \otimes P$.

Задача. Чему равно значение μ на мономе c^n?

Алгебра Хопфа многочленов градуирована: пространство градуировки n в ней одномерно и порождено мономом c^n.

Алгебру многочленов от нескольких переменных можно превратить в алгебру Хопфа, задав коумножение на каждой переменной той же формулой. Градуировку в алгебре Хопфа многочленов можно менять, выбирая различные веса переменных.

Алгебру многочленов от нескольких переменных можно превратить в алгебру Хопфа, задав коумножение на каждой переменной той же формулой. Градуировку в алгебре Хопфа многочленов можно менять, выбирая различные веса переменных.

Например, в алгебре Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ можно задать градуировку, положив вес переменной p_i равным i для $i = 1, 2, \dots$.

Лекция 7. Алгебра Хопфа многочленов

Алгебру многочленов от нескольких переменных можно превратить в алгебру Хопфа, задав коумножение на каждой переменной той же формулой. Градуировку в алгебре Хопфа многочленов можно менять, выбирая различные веса переменных.

Например, в алгебре Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ можно задать градуировку, положив вес переменной p_i равным i для $i = 1, 2, \dots$.

Задача. Чему равна размерность однородного подпространства веса n в алгебре Хопфа многочленов $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$?

Всякий инвариант графов со значениями в алгебре над $\mathbb{C}$ продолжается по линейности до отображения алгебры графов $\mathcal{G}$. Продолженный инвариант мы называем тем же именем.

Всякий инвариант графов со значениями в алгебре над $\mathbb{C}$ продолжается по линейности до отображения алгебры графов $\mathcal{G}$. Продолженный инвариант мы называем тем же именем.

Theorem

Хроматический многочлен $\chi : \mathcal{G} \to P$ является гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Всякий инвариант графов со значениями в алгебре над $\mathbb{C}$ продолжается по линейности до отображения алгебры графов $\mathcal{G}$. Продолженный инвариант мы называем тем же именем.

Theorem

Хроматический многочлен $\chi : \mathcal{G} \to P$ является гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Theorem

Симметризованный хроматический многочлен Стенли $S : \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ является градуированным гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Всякий инвариант графов со значениями в алгебре над $\mathbb{C}$ продолжается по линейности до отображения алгебры графов $\mathcal{G}$. Продолженный инвариант мы называем тем же именем.

Theorem

Хроматический многочлен $\chi : \mathcal{G} \to P$ *является гомоморфизмом алгебр Хопфа.*

Theorem

Симметризованный хроматический многочлен Стенли $S : \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ *является градуированным гомоморфизмом алгебр Хопфа.*

Хроматический многочлен не является градуированным отображением — он отображает пространство графов $\mathcal{G}_n$ с n вершинами в пространство многочленов степени *не выше* n.

Theorem

Хроматический многочлен $\chi : \mathcal{G} \to P$ является гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Доказательство.

Theorem

Хроматический многочлен $\chi : \mathcal{G} \to P$ является гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Доказательство. Хроматический многочлен мультипликативен, поэтому он является гомоморфизмом структуры алгебры.

Theorem

Хроматический многочлен $\chi : \mathcal{G} \to P$ *является гомоморфизмом алгебр Хопфа.*

Доказательство. Хроматический многочлен мультипликативен, поэтому он является гомоморфизмом структуры алгебры.
Биномиальное свойство хроматического многочлена доказывает, что он является гомоморфизмом структуры коалгебры:

$$\chi : \mu(G) = \sum_{U \sqcup W = V(G)} G|_U \otimes G|_W \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(G)} \chi_{G|_U}(x)\chi_{G|_W}(y) = \chi_G(x+y).$$

Theorem

Симметризованный хроматический многочлен Стенли $S : \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ *является градуированным гомоморфизмом алгебр Хопфа.*

Доказательство.

Theorem

Симметризованный хроматический многочлен Стенли $S : \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ является градуированным гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Доказательство. Симметризованный хроматический многочлен Стенли мультипликативен, поэтому он является гомоморфизмом структуры алгебры.

Theorem

Симметризованный хроматический многочлен Стенли $S : \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ является градуированным гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Доказательство. Симметризованный хроматический многочлен Стенли мультипликативен, поэтому он является гомоморфизмом структуры алгебры. Симметризованный хроматический многочлен Стенли осуществляет градуированное отображение: для графа G на n вершинах многочлен S_G является квазиоднородным степени n.

Theorem

Симметризованный хроматический многочлен Стенли $S:\mathcal{G}\to\mathcal{P}$ является градуированным гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Доказательство. Симметризованный хроматический многочлен Стенли мультипликативен, поэтому он является гомоморфизмом структуры алгебры.
Симметризованный хроматический многочлен Стенли осуществляет градуированное отображение: для графа G на n вершинах многочлен S_G является квазиоднородным степени n.
Биномиальное свойство симметризованного хроматического многочлена Стенли:

- Вычислив симметризованный хроматический многочлен Стенли двух различных деревьев на 4 вершинах, убедитесь в том, что эти значения (в отличие от значений хроматического многочлена) различны.
- **Гипотеза Р. Стенли.** Для любых двух неизомоморфных деревьев их симметризованные хроматические многочлены Стенли различны. (Проверена для всех деревьев, имеющих не более 23 вершин, 14828074 штук.)
-

- Вычислите симметризованный хроматический многочлен Стенли для полных графов.

Семинары 7. Задачи

- Вычислите симметризованный хроматический многочлен Стенли для полных графов.
- Докажите, что подалгебра в алгебре графов $\mathcal{G}$, порожденная полными графами K_n, является подалгеброй Хопфа в $\mathcal{G}$.

Семинары 7. Задачи

- Вычислите симметризованный хроматический многочлен Стенли для полных графов.
- Докажите, что подалгебра в алгебре графов $\mathcal{G}$, порожденная полными графами K_n, является подалгеброй Хопфа в $\mathcal{G}$.
- Докажите, что подалгебра в алгебре графов $\mathcal{G}$, порожденная полными двудольными графами $K_{n,m}$, является подалгеброй Хопфа в $\mathcal{G}$.

- Пусть K — конечная абелева группа, $\mathcal{F}_K$ — пространство функций на ней, $\mathcal{F}_K = \{K \to \mathbb{C}\} \equiv \mathbb{C}^{|K|}$. Пространство $\mathcal{F}_K$ наделено структурой алгебры с поточечным сложением и умножением. Определим коумножение $\mu : \mathcal{F}_K \to \mathcal{F}_K \otimes \mathcal{F}_K$ равенством $\mu(f)(x \otimes y) = f(xy)$. Докажите, что так определенное коумножение превращает $\mathcal{F}_K$ в коммутативную кокоммутативную алгебру Хопфа.
- **Замечание.** Структура алгебры Хопфа на пространстве многочленов $\mathbb{C}[x]$ имеет такую же природу. Многочлены мы можем рассматривать как функции на коммутативной группе $\mathbb{C}$ с операцией сложения $+$. Введенное коумножение μ соответствует биномиальному тождеству $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

- Определим алгебру Хопфа взвешенных графов $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots$ следующим образом. Векторное пространство $\mathcal{W}_k$ порождено графами с взвешенными вершинами суммарного веса k по модулю соотношений удаления-стягивания

$$G = G'_e + G''_e$$

для произвольного взвешенного графа G и произвольного ребра e в нем. Здесь через G'_e обозначен результат удаления ребра e из графа G, а через G''_e — результат стягивания этого ребра. *При стягивании ребра вес новой вершины становится равным сумме весов двух концов ребра e.* Коумножение $\mu : \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}$ отображает взвешенный граф G в сумму тензорных произведений $\mu : G \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(G)} G|_U \otimes G|_W$, где при индуцировании на подмножество вершин веса вершин сохраняются. Докажите, что $\mathcal{W}$ действительно алгебра Хопфа.

- Докажите, что алгебра Хопфа $\mathcal{W}$ градуированно изоморфна алгебре Хопфа $\mathcal{P}$. (**Указание:** Постройте универсальный инвариант взвешенных графов, удовлетворяющий соотношению удаления-стягивания.)

Семинары 7. Задачи

- Докажите, что алгебра Хопфа $\mathcal{W}$ градуированно изоморфна алгебре Хопфа $\mathcal{P}$. (**Указание:** Постройте универсальный инвариант взвешенных графов, удовлетворяющий соотношению удаления-стягивания.)
- По модулю соотношения удаления-стягивания всякий взвешенный граф эквивалентен линейной комбинации графов без ребер. Поставим в соответствие графу на одной вершине веса n переменную p_n. Всякий простой граф G можно рассматривать как взвешенный граф с весами всех вершин равными 1. Докажите, что сопоставляемая простому графу линейная комбинация взвешенных графов без ребер после подстановки $p_k \mapsto (-1)^{k-1}p_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ совпадает с симметризованным хроматическим многочленом Стенли.