ОДУ-2022. Семинар №9

(1 ноября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами (повторение)

Теоретический материал см. в записках к предыдущему семинару.

Задача 9.1. (а) Найдите все решения однородного линейного уравнения $y''' + y'' - y' - y = 0$.
(б) Укажите, в каком виде нужно искать частное решение уравнения $y''' + y'' - y' - y = f(x)$, где $f(x) = x$; $f(x) = \sin x$; $f(x) = e^x \sin x$; $f(x) = (2x+1)e^{-x}\cos x$; $f(x) = e^x$; $f(x) = e^{-x}$; $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$.
(Укажите рещение с неопределёнными коэффициентами, искать эти коэффициенты не нужно.)

Решение. (а) Характеристический многочлен равен $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 = (\lambda^2-1)(\lambda+1) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$: он имеет корень 1 кратности 1 и корень -1 кратности 2. Значит, общий вид решения — $y(x) = Ae^x + (Bx + C)e^{-x}$.
(б) В правой части стоит квазимногочлен (сумма двух квазимногочленов) с показателем μ кратности 0:
$f(x) = x$: $\mu = 0$, $y(x) = (ax + b)$;
$f(x) = \sin x$: $\mu = \pm i$, $y(x) = a\sin x + b\cos x$;
$f(x) = e^x \sin x$: $\mu = 1 \pm i$, $y(x) = ae^x \sin x + be^x \cos x$;
$f(x) = (2x + 1)e^{-x}\cos x$: $\mu = -1 \pm i$, $y(x) = (ax + b)e^{-x}\cos x + (cx + d)e^{-x}\sin x$;
в правой части стоит квазимногочлен с показателем $\mu = 1$ кратности 1:
$f(x) = e^x$: $y(x) = axe^x$ (be^x — решение однородного уравнения, поэтому этот член не нужен);
в правой части стоит квазимногочлен с показателем $\mu = -1$ кратности 2:
$f(x) = e^{-x}$: $y(x) = ax^2e^{-x}$ ($(bx + c)e^{-x}$ — решения однородного уравнения, поэтому эти члены не нужны);
$f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$: $y(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^{-x}$. Обратите внимание, что хотя в исходном квазимногочлене нет свободного члена, «соответствующий ему» член cx^2 нужно включать в искомый квазимногочлен (в отличие от членов $(\alpha x + \beta)e^{-x}$, которые включать не нужно, они решают однородное уравнение). И действительно, можно проверить, что решение имеет вид $((-1/24)x^4 - (1/6)x^3 - (1/4)x^2)e^{-x}$, т.е. $c = -1/4 \neq 0$. ◀

Линейные системы с постоянными коэффициентами. Экспонента матриц

Рассмотрим однородную линейную систему (первого порядка):

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = b. \tag{1}$$

Здесь A — постоянная известная матрица, b — постоянный вектор.

Утверждение. Решение задачи Коши (1) имеет вид:

$$x(t) = \exp(tA)b. \tag{2}$$

Здесь

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \quad —$$

экспонента матрицы tA. Если посмотреть на (i, j)-й элемент правой части, там будет стоять (числовой) степенной ряд по переменной t. Всё выражение вместе будет степенным рядом с матричными коэффициентами. На лекции вам доказали, что радиус сходимости этого степенного ряда равен бесконечности, то есть он сходится при всех t, и его можно почленно дифференцировать:

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} kt^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A\frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Для доказательства утверждения теперь достаточно воспользоваться (матричной) формулой Лейбница:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(\exp(tA))}{dt} b + \exp(tA)\frac{db}{dt} = A\exp(tA)b + 0 = Ax(t).$$

Итак, для нахождения решений нужно уметь вычислять матричную экспоненту. Перечислим некоторые её свойства:

1. Если матрицы подобны: $B = TAT^{-1}$, то подобны и экспоненты: $\exp(tB) = T\exp(tA)T^{-1}$. (Достаточно подставить выражение для B в ряд для экспоненты и увидеть, что в B^n сокращаются все промежуточные $T^{-1}T$.)

2. Если матрица A имеет блочно-диагональный вид: $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, то экспоненту можно вычислять отдельно в каждом блоке: $A = \begin{pmatrix} \exp(tA_1) & 0 \\ 0 & \exp(tA_2) \end{pmatrix}$.

3. Если матрицы A и B коммутируют, то $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$. (Доказательство повторяет доказательство того, что $e^{x+y} = e^x e^y$.)

4. $\exp(t\lambda E) = e^{t\lambda}E$, где E — единичная матрица

5. Если $H_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, то $\exp(tH) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ .. & .. & .. & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

   (Здесь n — размер матрицы H_n.) Действительно, при вычислении последовательных степеней H_n диагональ единиц каждый раз смещается на одну позицию вправо. В частности, если $k \geq n$, то $(H_n)^k = 0$. От ряда для экспоненты остаётся конечный набор слагаемых, который и даёт искомую матрицу.

Как известно, над полем комплексных чисел любую матрицу можно привести к жордановой нормальной форме преобразованием подобия (сопряжением): $A = TDT^{-1}$. Тогда по первому свойству $\exp(tA) = T\exp(tD)T^{-1}$, а по второму свойству для вычисления $\exp(tD)$ достаточно посчитать экспоненту одной жордановой клетки. Далее, для одной жордановой клетки D размера $n \times n$ применим третье свойство: если

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_n + H_n,$$

то

$$\exp(tD) = \exp(\lambda t E_n)\exp(tH_n) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ .. & .. & .. & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, применение вышеприведённого алгоритма состоит из следующих шагов: (1) нахождение спектра матрицы A; (2) нахождение точного вида жордановой формы и матрицы T, сопрягающей A с этой жордановой формой; (3) вычисление экспоненты от жордановой формы и её сопряжение матрицей T^{-1}.

Первый шаг неизбежен, а второго шага, который вычислительно труден для матриц большого размера, можно избежать. Однако в самом простом случае, когда все собственные значения матрицы A вещественны и различны, прямолинейное применение описанного алгоритма вполне эффективно. Мы сегодня ограничимся этим случаем.

Итак, нам нужно найти матрицу T, для которой

$$A = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)T^{-1},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A. Если переписать это равенство в виде $AT = T\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то видно, что оно выполнено, если в качестве T взять матрицу $\|v_1, \ldots, v_n\|$, составленную из столбцов $v_1, \ldots, v_n$, являющихся собственными векторами матрицы A:

$$A\|v_1, \ldots, v_n\| = \|Av_1, \ldots, Av_n\| = \|\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\| = \|v_1, \ldots, v_n\| \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Итак, решение задачи Коши (1) имеет вид

$$x(t) = \exp(tA)b = \|v_1, \ldots, v_n\| \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})T^{-1}b.$$

Если обозначить здесь $T^{-1}b = c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, то мы получим $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$. Это (при произвольных константах c_j) общий вид решения системы $\dot{x} = Ax$. Если же нужно решить задачу Коши $x(0) = b$, то константы c_j находятся из условия $c = T^{-1}b$ или $Tc = b$. В частности, если нас интересует решение лишь для одного вектора начальных условий b, искать всю матрицу T^{-1} не нужно, достаточно решить систему $Tc = b$.

Разберём это на примере.

Задача 9.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = x_0, \\ y' = x + 4y, & y(0) = y_0. \end{cases}$$

Решение. Находим спектр матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

Таким образом, матрица A подобна диагональной матрице D:

$$A = T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Для определения преобразующей матрицы T нам нужны собственные вектора матрицы A, которые можно взять в виде:

$$A\,u_1 = 2u_1, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A\,u_2 = 3u_2, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, одна из возможных преобразующих матриц T может быть выбрана так:

$$T = \|u_1, u_2\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Теперь для экспоненты от матрицы системы получаем следующее выражение:

$$\exp(tA) = T \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix},$$

а ответ задачи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x_0 + y_0)e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - (x_0 + 2y_0)e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

◀

(*Эту часть рассказывайте при запасе времени. Мы это разберём в следующий раз.*) Другой способ состоит в нахождении общего вида решений с последующей подстановкой его в уравнение для подбора коэффициентов. На самом деле, этот метод сейчас не даёт преимуществ, он более выгоден в случае недиагонализуемой матрицы, а также для решения систем с (векторным) квазимногочленом в правой части.

Как мы видели, *фундаментальную систему решений* (ФСР), то есть базис в пространстве решений образуют столбцы матрицы $\exp(tA) = T\exp(tD)T^{-1}$. (Напомним также, что матрицу $M(t)$, столбцы которой — фундаментальная система решений, называют фундаментальной матрицей решений (ФМР).) Поскольку умножение на матрицу справа заменяет столбцы их линейными комбинациями, матрица $T\exp(tD) = \exp(tA)T$ также является ФМР. Столбец матрицы $T\exp(tD)$ получается линейным преобразованием из столбца матрицы $\exp(tD) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$. В этом столбце только один ненулевой элемент $\exp(t\lambda_j)$, значит, базисные решения можно искать в виде $x_j(t) = \exp(t\lambda_j)v_j$, где v_j — неизвестный вектор. Подстановка в уравнение $\dot{x}_j = Ax_j$ даёт равенство $\lambda_j \exp(t\lambda_j)v_j = A\exp(t\lambda_j)v_j$, то есть $\lambda_j v_j = A\lambda_j$, как мы и видели выше. Вот как это реализуется на практике.

Задача 9.3. Найдите решение системы $\dot{x} = 4y$, $\dot{y} = 9x$ с начальными условиями $x(0) = -2$, $y(0) = 9$.

Решение. Характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 + 0\lambda - 36 = 0$, его корни — 6 и -6. Соответственно, общий вид решения $(x(t), y(t))^T = e^{6t}v_1 + e^{-6t}v_2$ Поскольку линейная комбинация решений — снова решение, можно искать v_1 и v_2 отдельно.

Итак, пусть $x(t) = ae^{6t}$, $y(t) = be^{6t}$. Подставляя это в систему, получим $6ae^{6t} = 4be^{6t}$, $6be^{6t} = 9ae^{6t}$, откуда $a = 2c_1$, $b = 3c_1$ с произвольным c_1. То есть это решение имеет вид $c_1e^{6t}(2,3)^T$.

Аналогично, для $x(t) = ae^{-6t}$, $y(t) = be^{-6t}$ получаем $-6a = 4b$, $-6b = 4a$ и решение вида $c_2e^{-6t}(2,-3)^T$.

Получаем общий вид решения:

$$x(t) = 2c_1e^{6t} + 2c_2e^{-6t}, \quad y(t) = 3c_1e^{6t} - 3c_2e^{-6t}.$$

Подставляя сюда $t = 0$ и начальные условия, имеем систему $2c_1 + 2c_2 = -2$, $3c_1 - 3c_2 = 9$, откуда $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. ◀