

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2022  
ЛИСТОК 6

1. Убедитесь, что полиномы Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n + 1)P_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и докажите, что  $P_n(1) = 1$ .

2. Докажите, что при  $|z| < 1$  справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n,$$

где  $P_n(t)$  – полиномы Лежандра.

3. Докажите рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

а)  $(n + 1)P_{n+1}(t) - (2n + 1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$

б)  $(2n + 1)P_n(t) = P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t).$

4. Докажите, что

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \frac{2}{2n + 1} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

5. Найдите главный член асимптотики второго линейно-независимого решения дифференциального уравнения для полиномов Лежандра вблизи точек  $x = \pm 1$ .

6. Докажите, что функция  $r^n Y_n^m(\theta, \varphi)$ , где  $Y_n^m$  – сферическая функция, является однородным полиномом от  $x, y, z$  степени  $n$ .