

## Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать мне на почту [artamkin@mail.ru](mailto:artamkin@mail.ru), ДО УТРА СРЕДЫ перед следующим занятием.

### Задания с 6 занятия.

**ПРОСЬБА ПРИСЫЛАТЬ на проверку НЕ БОЛЕЕ ТРЕХ из этих задач — те, которые покажутся наиболее значимыми и интересными.**

- (1) Докажите, что любая плоская проективная особая неприводимая кубика проективно эквивалентна либо полукубической параболы  $y^2 = x^3$ , либо декартову листу  $y^2 = x^3 + x^2$ . (Привычнее приводить аффинные уравнения, имея в виду замыкание этих кривых в  $\mathbb{P}^2$ .)
- (2)
  - (a) Вычислите пополнение локального кольца особой точки для полукубической параболы и декартова листа.
  - (b) Докажите, что пополнение локального кольца особой точки полукубической параболы не имеет делителей нуля.
  - (c) Найдите делители нуля в пополнении локального кольца особой точки декартова листа и укажите их геометрический смысл.
  - (d) Докажите, что пополнение локального кольца особой точки для декартова листа и кривой  $xy = 0$  изоморфны.
- (3) Мы выяснили, что любая гладкая кубика  $X = V(F)$  ( $F$  — кубическая форма) имеет ровно 9 точек перегиба, являющихся пересечением  $X$  с ее гессианом, который мы обозначили через  $He X$ , и который тоже является кубикой, заданной уравнением  $H(x) = \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$ , и что все кубики, проходящие через эти 9 точек, это кубики пучка

$$X_{\lambda;\mu} = V(\lambda F + \mu H). \quad (1)$$

С другой стороны, мы выяснили, что 9 точек перегиба любых двух гладких кубик проективно эквивалентны, поэтому любая другая

кубика (и ее гессиан) проективно эквивалентны кубикам из пучка (1). Докажите, что у любой гладкой кубики пучка (1) эти 9 точек являются точками перегиба.

(4) (Один из подходов к предыдущей задаче)

(a) Какие бывают пучки особых коник на проективной плоскости?

(b) Докажите, что пучок поляр относительно одной из 9 точек перегиба пучка (1) есть пучок особых коник. [Посчитайте поляры у распавшихся кубик пучка (1).]

(c) Докажите, что пучок поляр из предыдущего пункта устроен следующим образом:  $P_a(X_{\lambda:\mu}) = l_a \cup T_a X_{\lambda:\mu}$ . Здесь через  $a$  обозначена одна из точек перегиба,  $T_a X_{\lambda:\mu}$  — касательная прямая к  $X_{\lambda:\mu}$  в точке  $a$ , и, наконец,  $l_a$  — некоторая фиксированная прямая, зависящая только от выбора точки перегиба  $a$ .

(5) Верно ли, что 9 прямых  $l_a$  из предыдущей задачи, соответствующих девяти различным точкам перегиба, образуют на двойственной плоскости систему Штейнера?