Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Некоторые элементы в алгебрах Хопфа ведут себя проще, чем другие, по отношению к операции коумножения. Элемент p алгебры Хопфа H с коумножением $\mu : H \otimes H \to H$ называется *примитивным*, если

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

Лекция 8. Примитивные элементы в алгебрах Хопфа

Некоторые элементы в алгебрах Хопфа ведут себя проще, чем другие, по отношению к операции коумножения. Элемент p алгебры Хопфа H с коумножением $\mu : H \otimes H \to H$ называется *примитивным*, если

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

Theorem

Примитивные элементы образуют векторное подпространство в алгебре Хопфа H.

Доказательство.

Некоторые элементы в алгебрах Хопфа ведут себя проще, чем другие, по отношению к операции коумножения. Элемент p алгебры Хопфа H с коумножением $\mu : H \otimes H \to H$ называется *примитивным*, если

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

Theorem

Примитивные элементы образуют векторное подпространство в алгебре Хопфа H.

Доказательство.

Задача. Как действует коумножение на произведение $p_1 p_2$ двух примитивных элементов?

Лекция 8. Примитивные элементы в алгебрах Хопфа

Некоторые элементы в алгебрах Хопфа ведут себя проще, чем другие, по отношению к операции коумножения. Элемент p алгебры Хопфа H с коумножением $\mu : H \otimes H \to H$ называется *примитивным*, если

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

Theorem

Примитивные элементы образуют векторное подпространство в алгебре Хопфа H.

Доказательство.

Задача. Как действует коумножение на произведение $p_1 p_2$ двух примитивных элементов?

Задача. Опишите примитивные элементы в алгебре Хопфа многочленов.

Граф K_1 — простой граф с одной вершиной — в алгебре Хопфа графов $\mathcal{G}$ является примитивным, $\mu(K_1) = 1 \otimes K_1 + K_1 \otimes 1$.

Граф K_1 — простой граф с одной вершиной — в алгебре Хопфа графов $\mathcal{G}$ является примитивным, $\mu(K_1) = 1 \otimes K_1 + K_1 \otimes 1$.

Какие еще графы являются примитивными?

Лекция 8. Примитивные элементы в алгебре Хопфа графов

Граф K_1 — простой граф с одной вершиной — в алгебре Хопфа графов $\mathcal{G}$ является примитивным, $\mu(K_1) = 1 \otimes K_1 + K_1 \otimes 1$.

Какие еще графы являются примитивными? Больше таких графов нет. Однако примитивными являются некоторые линейные комбинации графов.

Лекция 8. Примитивные элементы в алгебре Хопфа графов

Граф K_1 — простой граф с одной вершиной — в алгебре Хопфа графов $\mathcal{G}$ является примитивным, $\mu(K_1) = 1 \otimes K_1 + K_1 \otimes 1$.

Какие еще графы являются примитивными? Больше таких графов нет. Однако примитивными являются некоторые линейные комбинации графов.

Задача. Приведите пример примитивной линейной комбинации графов а) в $\mathcal{G}_2$; б) в $\mathcal{G}_3$.

Граф K_1 — простой граф с одной вершиной — в алгебре Хопфа графов $\mathcal{G}$ является примитивным, $\mu(K_1) = 1 \otimes K_1 + K_1 \otimes 1$.

Какие еще графы являются примитивными? Больше таких графов нет. Однако примитивными являются некоторые линейные комбинации графов.

Задача. Приведите пример примитивной линейной комбинации графов а) в $\mathcal{G}_2$; б) в $\mathcal{G}_3$.

Theorem (Милнор–Мур, 1979)

Пусть $\mathcal{H}$ — градуированная коммутативная кокоммутативная связная алгебра Хопфа,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots .$$

Тогда $\mathcal{H}$ изоморфна полиномиальной алгебре Хопфа от своих примитивных элементов.

Эта теорема означает, что выбрав в каждом однородном пространстве примитивных элементов $P(\mathcal{H}_i) \subset \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ базис, мы можем единственным образом представить всякий элемент в $\mathcal{H}$ как многочлен от элементов выбранного базиса.

Лекция 8. Проекция на подпространство примитивных

Примитивные элементы в алгебре Хопфа многочленов — это линейные многочлены, т.е. линейные комбинации переменных. Поэтому в градуированной алгебре Хопфа многочленов любой однородный элемент единственным образом представляется в виде суммы примитивного элемента и разложимого элемента — линейной комбинации произвдений элементов меньшей степени.

Лекция 8. Проекция на подпространство примитивных

Примитивные элементы в алгебре Хопфа многочленов — это линейные многочлены, т.е. линейные комбинации переменных. Поэтому в градуированной алгебре Хопфа многочленов любой однородный элемент единственным образом представляется в виде суммы примитивного элемента и разложимого элемента — линейной комбинации произвдений элементов меньшей степени.

Замечание. Константы — элементы степени 0 — мы считаем разложимыми.

Лекция 8. Проекция на подпространство примитивных

Примитивные элементы в алгебре Хопфа многочленов — это линейные многочлены, т.е. линейные комбинации переменных. Поэтому в градуированной алгебре Хопфа многочленов любой однородный элемент единственным образом представляется в виде суммы примитивного элемента и разложимого элемента — линейной комбинации произвдений элементов меньшей степени.

Замечание. Константы — элементы степени 0 — мы считаем разложимыми.

Другими словами, в полиномиальной алгебре Хопфа $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$ каждое однородное подпространство $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ раскладывается в прямую сумму подпространства однородных примитивных элементов $P(\mathcal{H}_k) \subset \mathcal{H}_k$ и подпространства однородных примитивных элементов $D(\mathcal{H}_k) \subset \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = P(\mathcal{H}_k) \oplus D(\mathcal{H}_k)$.

Лекция 8. Проекция на подпространство примитивных

Примитивные элементы в алгебре Хопфа многочленов — это линейные многочлены, т.е. линейные комбинации переменных. Поэтому в градуированной алгебре Хопфа многочленов любой однородный элемент единственным образом представляется в виде суммы примитивного элемента и разложимого элемента — линейной комбинации произвдений элементов меньшей степени.

Замечание. Константы — элементы степени 0 — мы считаем разложимыми.

Другими словами, в полиномиальной алгебре Хопфа $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$ каждое однородное подпространство $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ раскладывается в прямую сумму подпространства однородных примитивных элементов $P(\mathcal{H}_k) \subset \mathcal{H}_k$ и подпространства однородных примитивных элементов $D(\mathcal{H}_k) \subset \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = P(\mathcal{H}_k) \oplus D(\mathcal{H}_k)$.

Theorem

В каждом однородном подпространстве $\mathcal{H}_k$ связной градуированной коммутативной кокоммутативное алгебры Хопфа $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots$ определена проекция π_k на подпространство примитивных элементов $P(\mathcal{H}_k)$, ядром которой является подпространство разложимых элементов $D(\mathcal{H}_k)$.

Задача. Опишите подпространство разложимых элементов $D(\mathcal{G}_k)$ в однородном пространстве $\mathcal{G}_k$ алгеры Хопфа графов.

Задача. Опишите подпространство разложимых элементов $D(\mathcal{G}_k)$ в однородном пространстве $\mathcal{G}_k$ алгеры Хопфа графов.

Theorem

Проекция $\pi_k : \mathcal{G}_k \overset{D(\mathcal{G}_k)}{\longrightarrow} P(\mathcal{G}_k)$ *задается формулой*

$$\pi(G) = G - 1! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = V(G) \\ I_1, I_2 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} + 2! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = V(G) \\ I_1, I_2, I_3 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} G|_{I_3} - 3! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup I_4 = V(G) \\ I_1, I_2, I_3, I_4 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} G|_{I_3} G|_{I_4} + \dots$$

Лекция 8. Проекция на примитивные в алгебре Хопфа графов

Задача. Опишите подпространство разложимых элементов $D(\mathcal{G}_k)$ в однородном пространстве $\mathcal{G}_k$ алгеры Хопфа графов.

Theorem

Проекция $\pi_k : \mathcal{G}_k \xrightarrow{D(\mathcal{G}_k)} P(\mathcal{G}_k)$ *задается формулой*

$$\pi(G) = G - 1! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = V(G) \\ I_1, I_2 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} + 2! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = V(G) \\ I_1, I_2, I_3 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} G|_{I_3} - 3! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup I_4 = V(G) \\ I_1, I_2, I_3, I_4 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} G|_{I_3} G|_{I_4} + \dots$$

Example

$$\pi(K_2) = K_2 - K_1^2; \qquad \pi(A_3) = A_3 - 2K_2K_1 - K_1^3 + 2!K_1^3 = A_3 - 2K_2K_1 + K_1^3,$$
$$\pi(K_3) = K_3 - 3K_1K_2 + 2K_1^3.$$

Лекция 8. Проекция на примитивные в алгебре Хопфа графов

Задача. Опишите подпространство разложимых элементов $D(\mathcal{G}_k)$ в однородном пространстве $\mathcal{G}_k$ алгеры Хопфа графов.

Theorem

Проекция $\pi_k : \mathcal{G}_k \stackrel{D(\mathcal{G}_k)}{\longrightarrow} P(\mathcal{G}_k)$ *задается формулой*

$$\pi(G) = G - 1! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = V(G) \\ I_1, I_2 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} + 2! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = V(G) \\ I_1, I_2, I_3 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} G|_{I_3} - 3! \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup I_4 = V(G) \\ I_1, I_2, I_3, I_4 \neq \emptyset}} G|_{I_1} G|_{I_2} G|_{I_3} G|_{I_4} + \dots$$

Example

$$\pi(K_2) = K_2 - K_1^2; \qquad \pi(A_3) = A_3 - 2K_2K_1 - K_1^3 + 2!K_1^3 = A_3 - 2K_2K_1 + K_1^3,$$
$$\pi(K_3) = K_3 - 3K_1K_2 + 2K_1^3.$$

Задача. Чему равна размерность пространства примитивных элементов $P(\mathcal{G}_k)$ в алгебре Хопфа графов?

Чтобы определить гомоморфизм связных градуированных алгебр Хопфа, его достаточно задать на примитивных элементах. В частности, гомоморфизм $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов достаточно задать на проекции $\pi(G)$ всякого графа G на пространство примитивных. Такое отображение переводит G в моном $p_{|V(G)|}$ с некоторым коэффициентом. Набор этих коэффициентов полностью задает гомоморфизм.

Чтобы определить гомоморфизм связных градуированных алгебр Хопфа, его достаточно задать на примитивных элементах. В частности, гомоморфизм $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов достаточно задать на проекции $\pi(G)$ всякого графа G на пространство примитивных. Такое отображение переводит G в моном $p_{|V(G)|}$ с некоторым коэффициентом. Набор этих коэффициентов полностью задает гомоморфизм.

Example

Симметризованный хроматический многочлен Стенли можно задать, для любого графа G положив $S_{\pi(G)} = s_G p_{|V(G)|}$, где

$$s_G = -\sum_{\substack{E' \subset E(G) \\ G|_{E'} \text{ связен}}} (-1)^{b_1(G|_{E'})}.$$

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Вот еще один пример теневого инварианта.

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Вот еще один пример теневого инварианта.

Definition

Многочлен Абеля $A_G(p_1, p_2, \dots)$ графа G это теневой инвариант, для которого коэффициент a_G при $p_{|V(G)|}$ задается равенством

$$\begin{aligned} a_{\pi(G)} &= \text{число корневых остовных деревьев в } G \\ &= |V(G)| \cdot \text{число остовных деревьев в } G \end{aligned}$$

Лекция 8. Многочлен Абеля

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Вот еще один пример теневого инварианта.

Definition

Многочлен Абеля $A_G(p_1, p_2, \dots)$ графа G это теневой инвариант, для которого коэффициент a_G при $p_{|V(G)|}$ задается равенством

$$\begin{aligned} a_{\pi(G)} &= \text{число корневых остовных деревьев в } G \\ &= |V(G)| \cdot \text{число остовных деревьев в } G \end{aligned}$$

Example

Для любого дерева T_n на n вершинах коэффициент a_{T_n} равен

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Вот еще один пример теневого инварианта.

Definition

Многочлен Абеля $A_G(p_1, p_2, \dots)$ графа G это теневой инвариант, для которого коэффициент a_G при $p_{|V(G)|}$ задается равенством

$$\begin{aligned} a_{\pi(G)} &= \text{число корневых остовных деревьев в } G \\ &= |V(G)| \cdot \text{число остовных деревьев в } G \end{aligned}$$

Example

Для любого дерева T_n на n вершинах коэффициент a_{T_n} равен n.
Для цикла C_n на n вершинах коэффициент a_{C_n} равен

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Вот еще один пример теневого инварианта.

Definition

Многочлен Абеля $A_G(p_1, p_2, \dots)$ графа G это теневой инвариант, для которого коэффициент a_G при $p_{|V(G)|}$ задается равенством

$$\begin{aligned} a_{\pi(G)} &= \text{число корневых остовных деревьев в } G \\ &= |V(G)| \cdot \text{число остовных деревьев в } G \end{aligned}$$

Example

Для любого дерева T_n на n вершинах коэффициент a_{T_n} равен n.
Для цикла C_n на n вершинах коэффициент a_{C_n} равен n^2.
Для полного графа K_n на n вершинах коэффициент a_{K_n} равен

Градуированнные гомоморфизмы $\mathcal{G} \to \mathcal{P}$ алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ в алгебру Хопфа многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ называются *теневыми инвариантами*.

Вот еще один пример теневого инварианта.

Definition

Многочлен Абеля $A_G(p_1, p_2, \dots)$ графа G это теневой инвариант, для которого коэффициент a_G при $p_{|V(G)|}$ задается равенством

$$\begin{aligned} a_{\pi(G)} &= \text{число корневых остовных деревьев в } G \\ &= |V(G)| \cdot \text{число остовных деревьев в } G \end{aligned}$$

Example

Для любого дерева T_n на n вершинах коэффициент a_{T_n} равен n.
Для цикла C_n на n вершинах коэффициент a_{C_n} равен n^2.
Для полного графа K_n на n вершинах коэффициент a_{K_n} равен n^{n-1}.

Theorem

Пусть $E' \subset E(G)$ — остовный лес в графе G. Сопоставим ему моном

$$\alpha_{E'} = \prod_{\text{деревья } t_i \text{ в } G|_{E'}} |V(t_i)| p_{|V(t_i)|}.$$

Тогда

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Theorem

Пусть $E' \subset E(G)$ *— остовный лес в графе* G*. Сопоставим ему моном*

$$\alpha_{E'} = \prod_{\text{деревья } t_i \text{ в } G|_{E'}} |V(t_i)| p_{|V(t_i)|}.$$

Тогда

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Example

Вычислим многочлен Абеля для некоторых графов:

$$A_{A_2} \quad =$$

Theorem

Пусть $E' \subset E(G)$ — остовный лес в графе G. Сопоставим ему моном

$$\alpha_{E'} = \prod_{\text{деревья } t_i \text{ в } G|_{E'}} |V(t_i)| p_{|V(t_i)|}.$$

Тогда

$$A_G(p_1, p_2, \ldots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Example

Вычислим многочлен Абеля для некоторых графов:

$$\begin{aligned} A_{A_2} &= p_1^2 + 2p_2; \\ A_{A_3} &= \end{aligned}$$

Theorem

Пусть $E' \subset E(G)$ — остовный лес в графе G. Сопоставим ему моном

$$\alpha_{E'} = \prod_{\text{деревья } t_i \text{ в } G|_{E'}} |V(t_i)| p_{|V(t_i)|}.$$

Тогда

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Example

Вычислим многочлен Абеля для некоторых графов:

$$\begin{aligned} A_{A_2} &= p_1^2 + 2p_2; \\ A_{A_3} &= p_1^3 + 4p_1p_2 + 3p_3; \\ A_{K_3} &= \end{aligned}$$

Theorem

Пусть $E' \subset E(G)$ — остовный лес в графе G. Сопоставим ему моном

$$\alpha_{E'} = \prod_{\text{деревья } t_i \text{ в } G|_{E'}} |V(t_i)| p_{|V(t_i)|}.$$

Тогда

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Example

Вычислим многочлен Абеля для некоторых графов:

$$\begin{aligned}
A_{A_2} &= p_1^2 + 2p_2;\\
A_{A_3} &= p_1^3 + 4p_1p_2 + 3p_3;\\
A_{K_3} &= p_1^3 + 6p_1p_2 + 9p_3;\\
A_{C_4} &=
\end{aligned}$$

Theorem

Пусть $E' \subset E(G)$ — остовный лес в графе G. Сопоставим ему моном

$$\alpha_{E'} = \prod_{\text{деревья } t_i \text{ в } G|_{E'}} |V(t_i)| p_{|V(t_i)|}.$$

Тогда

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Example

Вычислим многочлен Абеля для некоторых графов:

$$\begin{aligned}
A_{A_2} &= p_1^2 + 2p_2; \\
A_{A_3} &= p_1^3 + 4p_1p_2 + 3p_3; \\
A_{K_3} &= p_1^3 + 6p_1p_2 + 9p_3; \\
A_{C_4} &= p_1^4 + 8p_1^2p_2 + 8p_2^2 + 12p_1p_3 + 16p_4.
\end{aligned}$$

Почему многочлен Абеля так называется? Он является обобщением на случай графов последовательности многочленов Абеля от одной переменной

$$A_n(x) = x(x+n)^{n-1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Почему многочлен Абеля так называется? Он является обобщением на случай графов последовательности многочленов Абеля от одной переменной

$$A_n(x) = x(x+n)^{n-1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

При подстановке $p_1 = p_2 = \dots = x$ многочлены Абеля полных графов становятся многочленами Абеля от одной переменной, $A_{K_n}(x, x, x, \dots) = A_n(x)$. В частности, коэффициент при x^k в многочлене Абеля $A_n(x)$ равен количеству корневых лесов из k деревьев в полном графе K_n на n вершинах.

Theorem

Для многочлена Абеля графов справедлива формула

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Доказательство.

Theorem

Для многочлена Абеля графов справедлива формула

$$A_G(p_1, p_2, \dots) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ E' \text{ остовный лес в } G}} \alpha_{E'}.$$

Доказательство.
Линейный член в определяемом формулой теоремы многочлене совпадает с определением монома $A_{\pi(G)}$. Кроме того, очевидно, что определяемый формулой многочлен мультипликативен. Поэтому для доказательства достаточно показать, что он является гомоморфизмом коалгебр, т.е. обладает свойством биномиальности

$$A_G(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = \sum_{U \sqcup W = V(G)} A_{G|_U}(x_1, x_2, \dots) A_{G|_W}(y_1, y_2, \dots).$$

Это свойство: разбиение деревьев всякого остовного леса на два подмножества определяет разбиение множества $V(G)$ на два подмножества.

- Вычислите многочлен Абеля для а) цепочки на n вершинах A_n; б) звезды на n вершинах S_n; в) цикла на n вершинах C_n.
- Докажите биномиальность последовательности многочленов Абеля от одной переменной:

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) A_{n-k}(y).$$

-

Семинары 8. Задачи

Семинары 8. Задачи

Семинары 8. Задачи