Прикладные методы анализа – 2022

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

5 Цилиндрические и сферические функции

6 Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности в d-мерном пространстве имеет вид

$$\partial_t u = \Delta u, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2.$$

В частности, в одном измерении имеем уравнение

$$u_t = u_{xx}.$$

Переменная t интерпретируется как время, а остальные переменные – пространственные декартовы координаты. Уравнение теплопроводности описывает такие разные физические процессы, как распространение тепла в теле (при этом $u(x,t)$ – температура в точке x в момент времени t), диффузия (при этом u – концентрация диффундирующего вещества), случайные блуждания (тогда $u(x,t)$ имеет смысл плотности вероятности обнаружения случайного блуждателя в точке x в момент времени t). Имея в виду второе из этих приложений, уравнение теплопроводности часто называют уравнением диффузии.

Эвристический вывод уравнения диффузии. Поясним, как получается уравнение диффузии, ограничившись случаем одного измерения. Рассмотрим сначала одну частицу, которая блуждает по решетке, состоящей из точек с координатами $0, \pm h, \pm 2h, \ldots$ в дискретном времени $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots$. Предположим, что если в момент времени $n\tau$ частица находилась в точке jh, то в следующий момент времени $(n+1)\tau$ она может с равной вероятностью оказаться либо в точке $(j-1)h$, либо в точке $(j+1)h$. Теперь предположим, что имеется много таких частиц, и поведение каждой не зависит от ее предшествующего поведения и от поведения остальных. При этом пусть в одной точке решетки может находиться одновременно много частиц (для наглядности эти точки можно представлять себе как маленькие клетки, вмещающие не одну частицу). Эта модель представляет собой простейшую модель процесса диффузии вещества, состоящего из этих частиц.

Допустим, что в некоторый момент времени $n\tau$ число частиц $N_j(n\tau)$ в каждой из точек jh велико. Тогда очевидно, что в следующий момент времени примерно половина всех частиц, находящихся в точке jh, перейдет на шаг влево в точку $(j-1)h$, а другая половина – на шаг вправо в точку $(j+1)h$, причем это утверждение тем точнее, чем больше число $N_j(n\tau)$. Примем, что этот закон является точным; тогда сразу придем к очевидному соотношению

$$N_j((n+1)\tau) = \frac{1}{2}\Big(N_{j-1}(n\tau) + N_{j+1}(n\tau)\Big).$$

В самом деле, в следующий момент времени в любую точку jh придет половина всех частиц, находившихся в предыдущий момент в ближайшей точке слева, и половина всех частиц, находившихся в ближайшей точке справа, а все частицы, изначально находившиеся в точке jh, уйдут из нее. Теперь обозначим $x = jh$, $t = n\tau$ и рассмотрим $N(x,t) = N_j(n\tau)$. Эта величина имеет смысл концентрации диффундирующего вещества в точке x в момент времени t. Наше соотношение можно переписать в виде

$$\frac{N(x,t+\tau) - N(x,\tau)}{\tau} = D\,\frac{N(x-h,t) - 2N(x,t) + N(x+h,t)}{h^2}, \qquad D = \frac{h^2}{2\tau}.$$

Переходя к непрерывному пределу $h \to 0$, $\tau \to 0$, так чтобы D осталось конечным и ненулевым, получаем дифференциальное уравнение

$$\partial_t N(x,t) = D\partial_x^2 N(x,t),$$

которое и представляет собой уравнение диффузии. Коэффициент D, который без ограничения общности можно положить равным 1 (добившись этого растяжением времени), называется коэффициентом диффузии.

Наше рассуждение нетрудно обобщить на любое число пространственных измерений. Например, приняв, что частицы на плоскости могут прыгать по точкам квадратной решетки с равной вероятностью на шаг влево, вправо, вверх и вниз, придем к уравнению диффузии с двумерным оператором Лапласа в правой части.

Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой. Некоторые общие свойства решений уравнения теплопроводности на прямой,

$$u_t = u_{xx},$$

можно вывести из самого уравнения, даже не решая его. Например, интегрированием по частям легко установить, что

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu(x,t)dx = 0,$$

и

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 u(x,t)dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx,$$

откуда следует, что второй момент $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 u(x,t)dx$ меняется во времени по линейному закону.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad t > 0.$$

Частное решение ищем методом разделения переменных: $u(x,t) = f(x)g(t)$. Для функций f, g получаем уравнения

$$\begin{cases} f'' + k^2 f = 0, \\ g' + k^2 g = 0, \end{cases}$$

откуда находим частные решения

$$u_k(x,t) = A(k)e^{-k^2 t + ikx}.$$

Общее решение – их непрерывная суперпозиция

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-k^2 t + ikx} dk.$$

При $t = 0$ имеем представление функции $u_0(x)$ в виде интеграла Фурье:

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx} dk.$$

Подставляя в формулу для $u(x,t)$ обратное преобразование Фурье,

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-ikx}dx,$$

находим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t + ik(x-\xi)}dk\right)u_0(\xi)d\xi.$$

Внутренний интеграл можно вычислить:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t + ik(x-\xi)}dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.$$

Введем функцию

$$G_0(x,\xi;t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},$$

тогда

$$(\partial_t - \partial_x^2) G_0(x, \xi; t) = \delta(t) \delta(x - \xi),$$

так что $G_0(x, \xi; t)$ является функцией Грина уравнения теплопроводности. Она еще называется тепловым ядром. Через нее выражается решение задачи Коши:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi; t) u_0(\xi) d\xi.$$

Функция Грина позволяет также решить неоднородное уравнение

$$u_t = u_{xx} + f(x,t).$$

Решение, равное нулю при $t = 0$, имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi; t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

В диффузионной интерпретации физический смысл функции Грина $G_0(x, \xi; t)$ таков: она равна концентрации диффундирующего вещества в точке x в момент времени $t > 0$, если при $t = 0$ все вещество было сосредоточено в точке ξ. Тот факт, что $G_0(x, \xi; t) > 0$ сразу на всей прямой при любых сколь угодно малых положительных значениях t означает, что диффузия (или распространение тепла) происходит с бесконечной скоростью, что физически невозможно. Бесконечная скорость диффузии в нашей модели является следствием идеализации процесса. Неформальное обсуждение решений уравнения теплопроводности и их физического смысла можно найти в книге [10].

Уравнение теплопроводности на отрезке. Рассмотрим теперь задачу на отрезке $[0, L]$ с нулевыми граничными условиями на концах:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Разделение переменных проходит так же, как и в случае прямой, но теперь возможные значения k квантуются: $k = k_n = \pi n / L$, $n \in \mathbb{N}$. Частное решение имеет вид

$$u_n(x,t) = C_n e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin \frac{\pi n x}{L}$$

а общее –

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

с произвольными константами C_n. Положив $t = 0$, видим, что C_n – коэффициенты разложения функции $u_0(x)$ в ряд Фурье:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{L} d\xi.$$

Отметим, что базисные функции $\sin \dfrac{\pi n \xi}{L}$ ортогональны на отрезке $[0, L]$:

$$\int_0^L \sin \frac{\pi n \xi}{L} \sin \frac{\pi m \xi}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{mn}.$$

Подставив выражение для C_n в формулу для общего решения, получим решение задачи Коши в виде

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,\xi;t)u_0(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi;t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin\frac{\pi n x}{L} \sin\frac{\pi n \xi}{L}, \quad t>0.$$

Это есть функция Грина задачи на отрезке (тепловое ядро). Бесконечную сумму можно вычислить явно, выразив через тэта-функции Якоби.

Задача в двух измерениях. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}.$$

Все очень похоже на одномерный случай. Функция Грина на бесконечной плоскости имеет вид

$$G_0(z,\zeta;t) = \frac{\theta(t)}{4\pi t}\, e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{4t}}.$$

Отметим, что эта формула легко обобщается на любую размерность d:

$$G_0(\vec{x}_1,\vec{x}_2;t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^d}\, e^{-\frac{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2}{4t}}.$$

Решение задачи Коши на плоскости записывается с помощью функции Грина аналогично одномерному случаю:

$$u(z,t) = \int_{\mathbb{C}} G_0(z,\zeta;t)u_0(\zeta)d^2\zeta.$$

Рассмотрим теперь задачу в компактной связной и односвязной области D с гладкой границей с условием $u\Big|_{\partial\mathsf{D}} = 0$. Пусть $\psi_n(z)$ – ортонормированные собственные функции оператора Лапласа в D, равные нулю на границе, с собственными значениями $-\lambda_n < 0$: $\Delta\psi_n + \lambda_n = 0$, $\psi_n\Big|_{\partial\mathsf{D}} = 0$. Они удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int_{\mathsf{D}} \psi_n(z)\psi_m(z)d^2z = \delta_{mn}$$

и полноты

$$\sum_n \psi_n(z)\psi_n(\zeta) = \delta(z-\zeta).$$

Функция Грина (тепловое ядро) имеет вид

$$G(z,\zeta;t) = \sum_n e^{-\lambda_n t}\psi_n(z)\psi_n(\zeta), \quad t>0.$$

Это ядро оператора $e^{t\Delta}$:

$$e^{t\Delta}f(z) = \int_{\mathsf{D}} G(z,\zeta;t)f(\zeta)d^2\zeta.$$

Действительно, разложим функцию f по собственным функциям: $f(z) = \sum_n c_n \psi_n(z)$, тогда

$$\sum_n \int_{\mathsf{D}} G(z,\zeta;t) f(\zeta) c_n \psi_n(\zeta) d^2\zeta = \sum_n \sum_m \int_{\mathsf{D}} c_n \psi_m(z)\psi_m(\zeta)\psi_n(\zeta) d^2\zeta$$
$$= \sum_n e^{-\lambda_n t} c_n \psi_n(z) = e^{t\Delta} f(z).$$

Тепловое ядро является фундаментальным решением уравнения теплопроводности в D с нулевыми граничными условиями. Если написать

$$G(z,\zeta;t) = \theta(t) \sum_n e^{-\lambda_n t} \psi_n(z)\psi_n(\zeta),$$

будем иметь

$$(\partial_t - \Delta_z) G(z,\zeta;t) = \delta(t)\delta(z-\zeta).$$

Важную роль играет значение теплового ядра на диагонали ($z = \zeta$) и интеграл

$$\int_{\mathsf{D}} G(z,z;t) d^2 z = \operatorname{tr} e^{t\Delta},$$

который имеет смысл следа оператора $e^{t\Delta}$. Большой интерес представляет разложение $\operatorname{tr} e^{t\Delta}$ при $t \to +0$ по степеням t. Отметим, что из физических соображений следует, что

$$G(z,\zeta;t) \le G_0(z,\zeta;t),$$

и на малых временах t

$$G(z,\zeta;t) = G_0(z,\zeta;t) + \text{малые поправки},$$

если точки z, ζ не слишком близки к границе. Это равенство следует из того, что на малых временах сгусток диффундирующего вещества в точке ζ еще не успеет как следует “почувствовать” присутствие границы, находящейся от него далеко. Из этих соображений мы можем сразу написать лидирующий член асимптотики теплового ядра при $t \to +0$:

$$G(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} + \text{менее сингулярные члены}, \quad t \to +0.$$

Разумеется, $G(z,z;t)$ должна обращаться в 0 на границе, поэтому эта асимптотика требует комментариев. Она перестает быть верной, если точка z стремится к границе одновременно с $t \to +0$. Точнее, пусть точка z близка к границе, и δ – расстояние от нее до границы, тогда указанная асимптотика справедлива на временах $0 < t < C\sqrt{\delta}$ с некоторой константой C порядка 1. Поэтому предельное значение $G(z,z;t)$ зависит от порядка взятия пределов $\delta \to +0$ и $t \to +0$: если мы сначала берем первый из них при фиксированном t, $G(z,z;t)$ стремится к 0, а если второй при фиксированном δ, $G(z,z;t)$ стремится к бесконечности как $1/(4\pi t)$.

Из найденной асимптотики диагонали теплового ядра сразу получаем лидирующий член асимптотики следа оператора $e^{t\Delta}$:

$$\operatorname{tr} e^{t\Delta} = \frac{A}{4\pi t} + \text{менее сингулярные члены},$$

где $A = A(\mathsf{D}) = \int_{\mathsf{D}} d^2 z$ – площадь области D.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.

[9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.

[10] Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва, 1973.

[11] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, Volume 73 (1966), Issue 4, Part 2: Papers in Analysis, 1–23.

[12] H.P. McKean, Jr., I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967) 43–69.