Математические основы квантовой механики 2022

Листок 3. Угловой момент и спин. Тождественные частицы.

срок сдачи 10 декабря 2022г.

---

1. Одной из наблюдаемых характеристик квантовомеханической системы является ее момент импульса[1], задаваемый векторным оператором $\hat{\vec{J}}$. Состояния системы $|m,j\rangle$ являются собственными векторами операторов $(\hat{\vec{J}}\,)^2$ и $\hat{J}_3$:

$$(\hat{\vec{J}}\,)^2\;|m,j\rangle = \hbar^2\, j(j+1)\,|m,j\rangle\,, \quad \hat{J}_3\,|m,j\rangle = \hbar\, m\,|m,j\rangle\,.$$

   а) Найдите средние значения и дисперсии $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ в состоянии $|m,j\rangle$.

   б) Проекция момента импульса системы на направление, задаваемое единичным вектором $\vec{n}$, характеризуется оператором $(\hat{\vec{J}},\hat{n})$. Для случая

$$\vec{n} = (n_1,n_2,n_3) = (\sin\theta, 0\,, \cos\theta)$$

   определите среднее значение и дисперсию этой наблюдаемой в состоянии $|m,j\rangle$.

   в) **(необязательная)** Определите вероятности получить при измерении проекций момента $\hat{J}_1$ и $(\hat{\vec{J}},\hat{n})$ максимально возможное значение $\hbar j$, если система находиится в состоянии $|m,j\rangle$.

   Указание. Здесь удобно воспользоваться операторами, играющими по отношению к $\hat{J}_1$ и $(\hat{\vec{J}},\hat{n})$ такую же роль, какую играет оператор $\hat{J}_+$ по отношению к $\hat{J}_3$.

2. Квантовомеханическая система состоит из двух частиц. Состояние каждой частицы полностью характеризуется оператором ее момента импульса $\hat{\vec{J}}^{(a)}$, где $a = 1,2$ — номера частиц.

   Наблюдатель приготавливает состояние системы, в котором достоверно известно, что значения скалярных квадратов моментов $(\hat{\vec{J}}^{(a)})^2$ равны $\hbar^2(j_a{+}1)j_a$, а значения проекций на ось $O\vec{z}$ моментов $\hat{J}_3^{(a)}$ равны $\hbar m_a$ $(j_a \in \mathbb{Z}^+\!/2,\ -j_a \le m_a \le j_a)$. Обозначим такое состояние

$$|\Psi\rangle = |m_1,j_1\rangle \otimes |m_2,j_2\rangle\,.$$

   а) Чему равны в состоянии $|\Psi\rangle$ средние значения компонент полного момента импульса системы $\hat{J}_i := \hat{J}_i^{(1)} + \hat{J}_i^{(2)}$, а также его скалярного квадрата $(\hat{\vec{J}}\,)^2$?

   б) Для частного случая $|\Psi\rangle = |j_1,j_1\rangle \otimes |j_2-1,j_2\rangle$ определите все возможные результаты измерения наблюдаемой $(\hat{\vec{J}}\,)^2$, а также вероятность их наблюдения.

   В случае $j_1 = j_2$ наблюдатель может приготовить скалярное состояние $|\Phi\rangle$, полный момент импульса которого достоверно равен нулю: $(\hat{\vec{J}}\,)^2\;|\Phi\rangle = 0$.

---

[1]Это может быть ее внутренний момент — *спин* $\hat{\vec{S}}$, или внешний — момент импульса частицы в пространстве, мы его далее называем *орбитальным моментом* и обозначаем $\hat{\vec{M}}$. В общем случае $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{M}} + \hat{\vec{S}}$.

в) Определите вероятности получения всех возможных результатов при измерении в состоянии $|\Phi\rangle$ 3-ей проекции момента импульса первой частицы $\hat{J}_3^{(1)}$. Какие результаты можно получить при последующем измерении 3-й проекции момента импульса второй частицы?

Указание. Удобно будет воспользоваться справедливыми для скалярного состояния соотношениями $\hat{J}_3 |\Phi\rangle = \hat{J}_\pm |\Phi\rangle = 0$.

3. **3-мерный изотропный гармонический осциллятор.** Расмотрим модель с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + \frac{mw^2\hat{\vec{q}}^{\,2}}{2}, \qquad \vec{p} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{q} \in \mathbb{R}^3,$$

в координатном представлении и в сферических координатах (обсуждение этой модели в терминах операторов рождения-уничтожения см. в лекции 16.11.2022).

Используя базис собственных векторов полного набора наблюдаемых $\{E, \vec{M}^2, M_3\}$ (здесь E и $\vec{M} = \vec{q} \times \vec{p}$ — энергия и орбитальный момент системы, соответственно) в стационарном уравнении Шредингера можно отделить угловые переменные θ и ϕ и свести задачу к решению радиального уравнения (см. видео лекций прошлого года 17.11.2021 и 24.11.2021, а также записки лекции №9 2020г., стр. 1–3.)

а) Определите асимптотики радиального уравнения при $r \to 0$ и $r \to +\infty$. Используя их, постройте анзац для поиска состояний дискретного спектра $\hat{H}$ — связанных состояний системы. Вычислите значения энергии E для состояний дискретного спектра системы.

Указание. Действуйте аналогично тому, как это делалось при построении связанных состояний атома водорода

б) Для каждого дискретного уровня энергии E определите кратность его вырождения и возможные значения величины орбитального момента системы $\vec{M}^2$ при данном значении E.

в) Найдите плотность пространственного распределения изотропного гармонического осциллятора в основном и в первом возбужденном состояниях в случае, когда $M_3 = 0$. Выражения для сферических гармоник можно не выводить, а позаимствовать, например, в лекциях:

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \qquad Y_1^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{\pm i\phi} \sin\theta, \qquad Y_1^0 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \cos\theta.$$

4. Система из четырех невзаимодействующих друг с другом тождественных частиц со спином 1/2 помещена во внешнее силовое поле с потенциалом 3-мерного изотропного гармонического осциллятора. Таким образом пространство состояний системы — $(L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2))^{\otimes 4}$.

а) Определите значения энергии основного и первого возбужденного состояний этой системы, а также кратности их вырождения.

б) Для основного состояния системы определите возможные значения
   - полного спина системы частиц;
   - полного орбитального момента системы;
   - полного момента импульса системы — суммы ее спина и орбитального момента.

в) **(необязательная)** Запишите волновую функцию основного состояния системы с нулевыми значениями полного спина и полного орбитального момента.