ОДУ-2022. Семинар №10–11

(14/15 и 15/18 ноября)

Линейные системы с постоянными коэффициентами (продолжение)

Два различных вещественных собственных значения

Продолжим разбирать случай разных вещественных собственных значений, ограничившись размерностью $n = 2$. Мы видели, что решение системы имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$

где $v_{1,2}$ — собственные векторы с собственными значениями $\lambda_{1,2}$. Как устроен фазовый портрет такой системы? Напомним, что фазовый портрет — это множество траекторий с ориентациями. Траектория здесь понимается как (непараметризованная) кривая на плоскости (x_1, x_2), вычерчиваемая каким-либо решением $x(t)$.

Начнём со случая, когда v_j — стандартный базис, то есть решение имеет вид $x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$. Тогда $x_2 = C|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$. Качественно возможны следующие ситуации:[1]

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ — **седло**: траектории похожи на семейство гипербол вместе с асимптотами, направление движения определяем, начиная с асимптот: на оси абсцисс $x_2 = 0$, $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, где $\lambda_1 < 0$, поэтому движение происходит от нуля, а на оси ординат — к нулю.

2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — **неустойчивый невырожденный узел**: траектории похожи на семейство $x_2 = C|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$ «половинок парабол», касающихся оси абсцисс. Движение по всем траекториям происходит от нуля (это и есть «неустойчивый» в названии — решения убегают от положения равновесия). Запомнить, какого направления касаются траектории можно ещё так: раз $\lambda_2 > \lambda_1$, то $e^{\lambda_2 t}$ стремится к нулю/бесконечности при $t \to \pm\infty$ быстрее $e^{\lambda_1 t}$, поэтому при $t \to +\infty$ ордината x_2 будет намного меньше абсциссы x_1 — решение касается оси абсцисс.

3. $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ — **неустойчивый дикритический узел**: траектории — лучи, выходящие из начала координат, с движением также от нуля.

4. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ — **устойчивый невырожденный узел**: всё то же самое с заменой $t \to -t$ и обращением ориентации на траекториях.

5. $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$ — **устойчивый дикритический узел**: всё то же самое с заменой $t \to -t$ и обращением ориентации на траекториях.

Перейдём к случаю общего базиса. Матрица системы подобна диагональной: $A = TDT^{-1}$, где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Поэтому если обозначить $x = Ty$, мы получим, что

$$\dot{y} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}TDT^{-1}x = Dy.$$

На эту выкладку можно смотреть двояко: либо считать, что y — другая система координат на той же плоскости, либо что y — координаты на «другой плоскости», а $x = Ty$ задаёт аффинное отображение между этим плоскостями. Нам будет удобнее второй подход. Тогда можно сказать,

[1] Фазовые портреты приведены на рис. 5.2 учебника Буфетова—Гончарук—Ильяшенко, см. страницу курса

что $x = x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = Ax$, тогда и только тогда, когда $y(t) = T^{-1}x(t)$ — решение уравнения $\dot{y} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)y$. Это значит, что фазовый портрет на плоскости y переводится в фазовый портрет на плоскости x нашим отображением $x = Ty$. Заметим, что это отображение переводит собственные векторы матрицы $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ (то есть просто базисные векторы $e_{1,2}$) в собственные векторы матрицы A: если $\lambda_j u = Du$, то для $v = Tu$ получим

$$Av = ATu = TDu = T(\lambda u) = \lambda v.$$

Соответственно, другие траектории для системы $\dot{x} = Ax$ будут вести себя аналогично рассмотренному выше случаю, только с заменой координатных осей на собственные подпространства A: например, если $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, то фазовая кривая (не являющаяся лучом на прямой $\mathbb{R}v_2$) будет при $t \to -\infty$ стремиться к нулю, касаясь при этом прямой $\mathbb{R}v_1$. Наоборот, при $t \to +\infty$ направление касательных к решению будет приближаться к v_2 (если это решение не лежит на прямой $\mathbb{R}v_1$). Разберём это на примере.

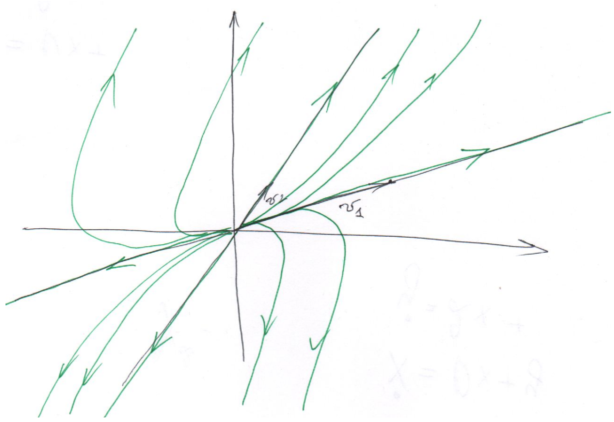
Задача 10.1. Постройте фазовый портрет системы

$$\dot{x} = x + 3y, \quad \dot{y} = 5y - x.$$

Решение. Характеристический полином имеет вид $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Собственные значения и векторы следующие:

$$\lambda_1 = 2, v_1 = (3, 1)^T, \quad \lambda_2 = 4, v_2 = (1, 1)^T.$$

Это неустойчивый невырожденный узел, решения будут в нуле касаться v_1, а на бесконечности иметь касательную, близкую к v_2.



◀

Собственное значение кратности 2: жорданова клетка

Перейдём к случаю, когда характеристический полином имеет *кратный* корень: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$. (Как и раньше, мы ограничиваемся $n = 2$.)

Для матрицы 2×2, не пропорциональной единичной матрице $A \neq \lambda_0 E_2$ условие кратного корня характеристического полинома автоматически означает, что A подобна жордановой клетке 2×2:

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Преобразующая матрица T строится из единственного собственного вектора u и отвечающего ему присоединенного вектора v, которые находятся из уравнений:

$$Au = \lambda_0 u, \qquad (A - \lambda_0 I)v = u.$$

Тогда столбцами матрицы T будут вектора u и v: $T = \|u, v\|$ (порядок следования столбцов важен). В силу линейной независимости u и v матрица T обратима.

Задача 10.2. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 3y - x, & x(0) = x_0, \\ y' = 5y - 3x, & y(0) = y_0. \end{cases}$$

Решение. Находим спектр матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Характеристический полином имеет кратный корень $\lambda_0 = 2$. Собственный вектор выбираем в виде

$$Au = 2u, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее находим присоединенный вектор v:

$$(A - 2I)v = u \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В результате преобразующая матрица и ее обратная получаются в виде:

$$T = \|u, v\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Экспонента от жордановой клетки:

$$\exp t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, экспонента от матрицы системы находится перемножением трех матриц

$$\exp(tA) = e^{2t} T \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 - 3t & 3t \\ -3t & 1 + 3t \end{pmatrix}.$$

И, наконец, умножая e^{tA} на столбец начальных данных, получаем ответ задачи:

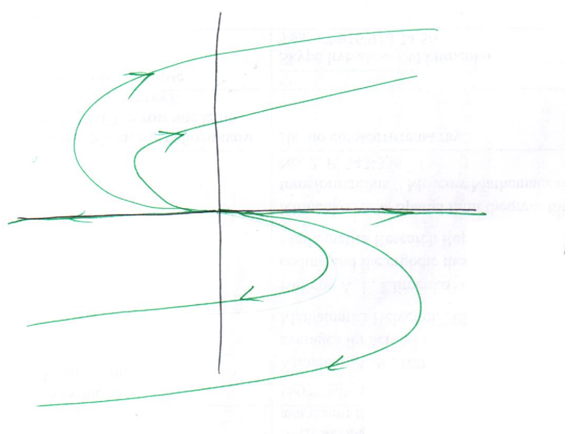
$$x(t) = e^{2t}(x_0(1 - 3t) + 3y_0 t), \quad y(t) = e^{2t}(-3x_0 t + y_0(1 + 3t)).$$

◀

Геометрически такой фазовый портрет называется **вырожденным узлом** (неустойчивым при $\lambda > 0$, устойчивым при $\lambda < 0$). Как и раньше, построим его сначала в системе координат, где матрица системы уже имеет вид жордановой клетки:

$$\dot{x}_1 = \lambda_0 x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_0 x_2,$$
$$x_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_0 t}, \quad x_2 = C_2 e^{\lambda_0 t}.$$

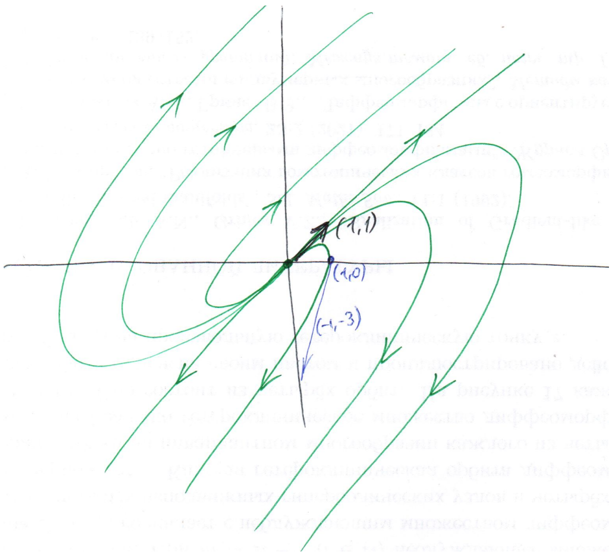
Итак, $x_1 = (A + \ln|x_2|)x_2$, где $A = (C_1/C_2) - \ln C_2$. График этого семейства кривых мы уже рисовали на одном из прошлых семинаров. Обратие внимание, что хотя из формулы этого напрямую не видно, при разных A получаются гомотетичные кривые.



Как и в предыдущем случае, для произвольной матрицы A, подобной жордановой клетке, фазовый портрет получается аффинным преобразованием. Соответственно, если v — собственный вектор матрицы A, прямая $\mathbb{R}v$ будет являться объединением трёх траекторий (особой точки и двух лучей), а другие фазовые кривые будут выходить из нуля, касаясь этой прямой и уходить на бесконечность, совершая «разворот на $180°$» — направление касательной будет снова приближаться к v. Но здесь есть сложность: «в какую сторону» они делают этот разворот? (Например, в случае, когда сама A — жорданова клетка, такое описание подходит и к «правильному» фазовому портрету, и к портрету, получающемуся из него симметрией относительно оси ординат — как же выбрать нужный?) Можно, конечно, найти матрицу T замены координат, но можно и поступить проще: для какой-нибудь точки x вне прямой $\mathbb{R}v$ нарисуем взаимное расположение прямой Ox и вектора $\dot{x} = Ax$: в зависимости от того, в какую полуплоскость он «смотрит», движение на фазовом портрете будет происходить по либо против часовой стрелки. Также по знаку λ_0 мы знаем, выходят траектории из нуля или входят в него. Объединяя эти соображения, строим окончательную картинку.

Задача 10.3. Постройте эскиз фазового портрета для системы из предыдущей задачи.

Решение. Как мы видели, характеристический многочлен имеет двукратный корень $\lambda_0 = 2$, которому соответствует собственный вектор $(1, 1)$. Посмотрим, например, на точку $x = (1, 0)$, в ней $\dot{x} = Ax = (-1, -3)$. Значит, решения уходят от нуля ($\lambda_0 > 0$), закручиваясь по часовой стрелке.



◀

Комплексно сопряжённые корни

Рассмотрим, наконец, случай, когда характеристический полином имеет два комплексно сопряжённых корня.

Идейно этот случай ничем не отличается от случая двух разных вещественных корней. Мы можем выйти в комплексное поле, диагонализовать матрицу системы комплексными преобразующими матрицами и вычислить соответствующую экспоненту от диагональной матрицы, которая подобна матрице системы A.

Мы рассмотрим другой подход, не требующий перемножения комплексных матриц. Часто это оказывается проще по объему вычислений.

Итак, пусть характеристическое уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ имеет комплексные корни λ_1 и λ_2. Поскольку коэффициенты характеристического полинома вещественны, комплексные корни обязательно сопряжены друг другу:

$$\lambda_1 = q + i\omega, \quad \lambda_2 = q - i\omega, \quad q, \omega \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0.$$

Собственные вектора матрицы A лежат в пространстве $\mathbb{C}^2$, то есть, это вектор-столбцы с комплексными коэффициентами:

$$Af_{1,2} = \lambda_{1,2} f_{1,2}.$$

Пользуясь вещественностью матрицы A, собственный вектор f_2 можно взять комплексно сопряженным к f_1:

$$f_1 = u + iv, \quad f_2 = u - iv, \quad u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Подчеркнем, что вещественные вектора u и v *линейно независимы* над полем $\mathbb{C}$ (а значит, и над $\mathbb{R}$), поскольку в противном случае оказались бы линейно зависимыми собственные вектора f_1 и f_2.

Приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части равенства

$$A(u + iv) = (q + i\omega)(u + iv),$$

получаем соотношения:

$$Au = qu - \omega v, \quad Av = \omega u + qv.$$

Таким образом, в базисе вещественного пространства $\mathbb{R}^2$, образованном векторами u и v, матрица A имеет следующий стандартный вид:

$$Q = \begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix}.$$

К этому виду матрица A приводится преобразованием подобия с матрицей $T = \|u, v\|$ (невырожденной в силу линейной независимости столбцов). Доказательство несложно:

$$AT = \|Au, Av\| = \|qu - \omega v, \omega u + qv\| = \|u, v\| \begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix} = TQ.$$

Осталось вычислить $\exp(tQ)$. Представим матрицу Q в виде суммы коммутирующих матриц

$$Q = qE + \omega\sigma, \quad \sigma \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

После этого получаем

$$\exp(tQ) = \exp(tqE)\exp(t\omega\sigma) = e^{qt} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались следующим выражением для экспоненты от матрицы $t\omega\sigma$:

$$\exp(t\omega\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Доказательство может быть получено явным суммированием экспоненциального ряда на основе следующего свойства степеней матрицы σ:

$$\sigma^n = \begin{cases} (-1)^k E, & n = 2k \\ (-1)^k \sigma, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Учитывая это, получаем ответ:

$$\begin{aligned} \exp(t\omega\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\omega\sigma)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{(t\omega)^{2k}}{(2k)!} E + (-1)^k \frac{(t\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sigma \right) \\ &= E\cos(t\omega) + \sigma\sin(t\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 10.4. Решить систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y & x(0) = x_0 \\ y' = -x - y, & y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для матрицы системы имеет комплексно сопряженные корни:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Здесь $q = 1$, $\omega = 1$. Найдем комплексный собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1:

$$Af = \lambda_1 f \quad \Rightarrow \quad f_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u + iv.$$

Матрица A приводится к стандартному виду преобразованием подобия с матрицей $T = \|u, v\|$:

$$A = TQT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Экспонента $\exp(tA)$ имеет вид

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t & 5 \sin t \\ -\sin t & \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Умножив эту матрицу на столбец начальных данных, получаем ответ задачи:

$$x(t) = e^t((2x_0 + 5y_0)\sin t + x_0 \cos t), \quad y(t) = e^t(y_0 \cos t - (x_0 + 2y_0)\sin t).$$

◀

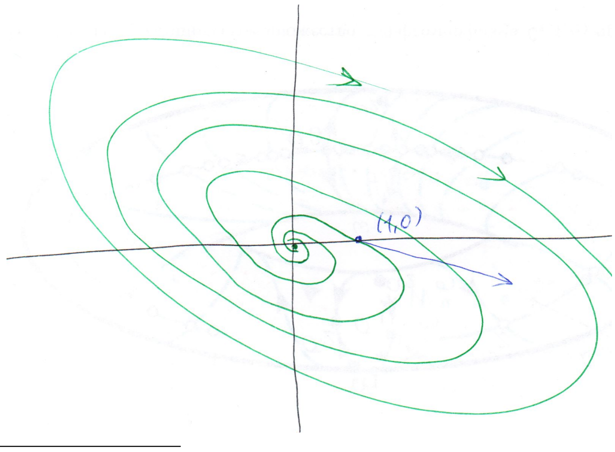
Качественно поведение системы зависит от знака $q = \operatorname{Re}\lambda_j$: при $q < 0$ система называется **устойчивым фокусом**, при $q > 0$ — **неустойчивым фокусом**, при $q = 0$ — **центром**.[2] В том базисе, где система имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} q & \omega \\ -\omega & q \end{pmatrix},$$

решение записывается в виде $x_1 = e^{qt}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$, $x_2 = e^{qt}(-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$. Траектории будут логарифмическими спиралями (если $q \neq 0$) либо окружностями. Осталось определить, в какую сторону закручены эти спирали. Рассмотрим, например, решение с $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ в момент времени $t = 0$: $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$, а вектор скорости в этой точке, согласно системе, равен $(q, -\omega)$, то есть он смотрит в нижнюю полуплоскость (если $\omega > 0$). Отсюда следует итоговая картинка. Тот же приём работает и в исходном базисе: нужно посмотреть на взаимное расположение радиус-вектора и вектора скорости в какой-либо точке.

Задача 10.5. Постройте эскиз фазового портрета для системы из предыдущей задачи.

Решение. Как мы видели, корни характеристического многочлена — $1 \pm i$, то есть это неустойчивый фокус. В точке $x = (1, 0)$ векторное поле равно $Ax = (3, -1)$, то есть движение происходит по часовой стрелке.



[2]Фазовые портреты приведены на рис. 5.3 учебника Буфетова—Гончарук—Ильяшенко, см. страницу курса.