Семинар 7.

Задача 1. Пусть C – коника по Штейнеру, и O – произвольная точка в $\mathbb{P}^2$, не лежащая на C. Проведем три произвольные прямые l, m, n через точку O, пересекающие конику C в точках X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 соответственно. Тогда по теореме Дезарга точки $S = (YZ) \cap (Y_1Z_1)$, $S' = (XZ) \cap (X_1Z_1)$, $S'' = (XY) \cap (X_1Y_1)$ лежат на одной прямой (оси Дезарга), которую мы обозначим через $\mathbf{p}_O$. Докажите, что прямая $\mathbf{p}_O$ не зависит от выбора вписанных в конику C перспективных треугольников XYZ и $X_1Y_1Z_1$, для которых она является осью Дезарга. (Например, вместо пары треугольников XYZ и $X_1Y_1Z_1$ можно взять пару треугольников X_1YZ и XY_1Z_1.) Она называется **полярой точки O относительно коники** C.

Задача 2. В обозначениях задачи 1 докажите, что поляра $\mathbf{p}_O$ совпадает с прямой Паскаля для конфигурации двух троек точек $X,\ Y,\ Z$ и $X_1,\ Y_1,\ Z_1$.

Задача 3. 1) Докажите, что для любой прямой l через точку O, пересекающей конику C в точках X и X_1, четверка точек $X,\ X_1,\ A,\ O$, где $A = \mathbf{p}_O \cap l$, является гармонической.
2) Выведите отсюда, что поляра точки O относительно коники C не зависит от выбора прямых l, m, n через точку O, с помощью которых она построена в задаче 1, а зависит лишь от точки O.

Задача 4. Пусть для простоты основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто.
1) Пользуясь конструкцией Штейнера, докажите, что произвольная прямая на плоскости пересекает конику по Штейнеру C не более, чем в двух точках.
2) Пользуясь произволом в выборе проективных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ на плоскости $\mathbb{P}^2$, а также в выборе проективного соответствия между пучками прямых, посредством которых построена коника по Штейнеру C, найдите уравнение коники C.

Задача 5. 1) В условиях задачи 3 докажите, что поляра $\mathbf{p}_O$ пересекает конику C в двух различных точках A и B. (Пусть для простоты основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто.)
2) Пусть $\mathbb{T}_A C$ и $\mathbb{T}_B C$ - касательные к конике C в точках A и B сответственно. Докажите, что O - точка пересечения прямых $\mathbb{T}_A C$ и $\mathbb{T}_B C$.