МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Конспект лекций

I семетр

Лекция 1

Элементы теории множеств

На первых порах мы будем использовать следующие множества: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \varnothing$. Они знакомы вам со школьных времён. Также считаются известными операции включения элемента во множество $a \in A$ и множества во множество $A \subset B$, пересечения и объединения множеств $A \cap B, A \cup B$, разности множеств $A \setminus B$ и декартова произведения множеств $A \times B$. В школе вы также изучали отображения множеств $f\colon A \to B$. Напомним, что можно выделить несколько видов отображений множеств: *инъективное, сюръективное и биективное*. Отображение $f\colon A \to B$ называется инъективными или отображением "в если $f(x)$ не совпадает с $f(y)$ для всяких несовпадающих $x, y \in A$. Отображение $f\colon A \to B$ называется сюръективным или отображением "на если для всякого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Отображение называется биективным, или взаимно-однозначным, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Конечно же, есть отображения, которые не являются ни инъективными, ни сюръективными.

В матанализе активно используется язык кванторов. Нам понадобятся кванторы всеобщности $\forall$ и существования $\exists$. Их пока следует понимать как символьное обозначение слов "для всякого, для любого"в случает квантора $\forall$ и "существует"в случае квантора $\exists$. Например определение сюръективного отображения перепишется следующим образом: $\forall b \in B\ \exists a \in A\colon f(a) = b$. Двоеточие читается как "такой что".

Напомним также , что мощностью конечного множества называется число элементов в нём. При этом мощность множества $\varnothing$ равна 0. Для бесконечных множеств понятие мощности не определяется, но определяется понятие равномощных множеств: два множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

Нам понадобятся две следующие теоремы, которые будут доказаны в курсе "введение в дискретную математику и топологию".

Теорема. *Для любых двух множеств A и B верно следующее: они либо равномощны, либо нет. Причём в последнем случае верно, что либо A равномощно подмножеству B, либо B равномощно подмножеству A.*

Теорема Кантора-Бернштейна. *Если A равномощно подмножеству B, а B равномощно подмножеству A, то A и B равномощны.*

Счётным мы будем называть всякое множество, равномощное $\mathbb{N}$. Например, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счётны. Докажем следующую теорему

Теорема. *Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчётно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда последовательности из 0 и 1 можно занумеровать следующим образом: в первой строке выпишем первую последовательность, во второй строке - вторую и т.д. Предъявим последовательность из 0 и 1, которую нельзя вписать ни в какую строку. Её первый элемент отличен от первого элемента первой строки, второй элемент отличен от второго элемента второй строки и т.д. Эта последовательность не может стоять в $n-$ой строке, т.к. она отличается от этой строки $n-$м элементом. $\square$

Множество называется континуальным, если оно равномощно множеству последовательностей из 0 и 1. Примеры континуальных множеств: $\mathbb{R}, [0,1], (-2.5, 7)$.

Пример. Покажем, что всякое бесконечное множество A равномощно его объединению со счётным (или конечным) множеством B. Действительно, найдём в A счётную часть S (почему она есть?). Рассмотрим разбиение $A = (A \setminus S) \cup S$. Тогда биекцию с $A \cup B$ построим таким образом: на $A \setminus S$ - это тождественное отображение, а на S есть биекция с $S \cup B$.

Упражнение. Покажите, что произведение континуальных множеств континуально, а счётных счётно.

Теория вещественных чисел

Есть различные подходы к определению вещественного числа. Мы будем следовать аксиоматическому подходу, а именно предъявим такой набор аксиом, что множество, удовлетворяющее этому набору, будет называется множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$. Корректность этого определения (т.е. что такое множество действительно существует и оно в некотором смысле единственно) будет доказана в начале второго модуля.

Мы начнём с определения группы. Множество G называется *группой* (точнее, *коммутативной* или *абелевой* группой) относительно операции $*$, если выполнены следующие условия:

(i) Существует нейтральный элемент $e \in G$ такой, что $\forall x \in G$ справедливо $x * e = e * x = x$.
(ii) Существует обратный элемент: $\forall x \in G\ \exists y \in G$ такой, что $x * y = y * x = e$.
(iii) Операция $*$ ассоциативна: всегда $(a * b) * c = a * (b * c)$.
(iv) Операция $*$ коммутативна: всегда $a * b = b * a$.

При этом используют либо знак $+$ сложения, либо знак $\times$ (он же $\cdot$) умножения. Если $+$, то группу называют *аддитивной группой*, или *группой по сложению*, если $\times$, — *мультипликативной группой*, или *группой по умножению*. В мультипликативной группе очень часто знак операции не пишут вообще. В аддитивной группе нейтральный элемент называется 0, обратный элемент к a обозначается $-a$. В мультипликативной группе нейтральный элемент называется 1, обратный элемент к a обозначается a^{-1}. Конечно же, есть и некоммутативные группы (они нам пока не понадобятся). Подробнее группы будут изучаться в курсе алгебры.

Аксиомы операций. На множестве вещественных чисел заданы 2 коммутативные бинарные операции, сложения и умножения. Вот аксиомы, которым они удовлетворяют:

(i) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ — аддитивная коммутативная группа.
(ii) Множество вещественных чисел $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — мультипликативная коммутативная группа.
(iii) Умножение дистрибутивно относительно сложения: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ верно, что $(x + y)z = xz + yz$.

Если выполнены такие аксиомы, то множество называется *полем* (т.е. заданы две коммутативных операции, связанные между собой законом дистрибутивности). Таким образом, первая аксиома вещественных чисел говорит, что на $\mathbb{R}$ заданы 2 операции, относительно которых $\mathbb{R}$ является полем. Примеры полей $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$. На $\mathbb{Z}$ со стандартными $+$ и $\times$ нет структуры поля. Как и множества, поля бывают конечными и бесконечными. Например, поле $\mathbb{F}_2$ состоит из двух элементов 0 и 1.

Аксиомы порядка. Говорят, что на множестве A определено *отношение* $\leqslant$, если в множестве пар $(a, b), a \in A, b \in A$ выбрано некоторое подмножество. Если пара (a, b) принадлежит подмножеству, то будем говорить, что $a \leqslant b$.

Отношение называется отношением порядка, если выполнены следующие свойства:

(i) $a \leqslant a$;
(ii) $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow a = b$ (символ "$\wedge$"читается как "и");
(iii) $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$.

Если дополнительно выполнено свойство $\forall a, b \in A$ либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$ (то есть все элементы множества A сравнимы), то множество называется линейно упорядоченным, если нет (не все элементы сравнимы) − частично упорядоченным. Наряду со знаком $\leqslant$ употребляем знак $\geqslant$: $x \leqslant y \Leftrightarrow y \geqslant x$. Пример отношения на множестве натуральных чисел (помимо очевидного): m делится на n.

Определение. *Поле F называется упорядоченным полем, если на этом поле задано отношение порядка, F линейно упорядочено, причём $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ $\forall c \in F$ и $(0 \leqslant a) \wedge (0 \leqslant b) \Rightarrow 0 \leqslant ab$.*

Примеры упорядоченных полей: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, множество рациональных функций, т.е. функций вида $R = P/Q$, где P, Q − многочлены, причём Q не тождественно 0 (при этом полагается, что $R > 0$, если коэффициенты при старших степенях в P и Q имеют один и тот же знак, а соотношение порядка таково: $R_1 \geqslant R_2 \Leftrightarrow R_1 - R_2 \geqslant 0$), множество $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, множество вещественных алгебраических чисел (т.е. корней полиномов с целыми коэффициентами)

Аксиома непрерывности (полноты). *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}, A, B \neq \varnothing$, причём $\forall a \in A, b \in B$ справедливо $a \leqslant b$. Тогда существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $\forall a \in A$ справедливо $a \leqslant c$, и $\forall b \in B$ справедливо $c \leqslant b$.*

Несмотря на кажущуюся очевидность аксиомы непрерывности, она позволяет отделить поле $\mathbb{R}$ от всех остальных упорядоченных полей.
Итак, мы готовы сформулировать определение вещественных чисел.

Определение. *Множеством вещественных чисел называется упорядоченное поле с аксиомой непрерывности.*

Для всех приведённых выше упорядоченных полей за исключением $\mathbb{R}$ аксиома непрерывности не выполняется. Действительно,

(i) для $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: между множествами $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \pi\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \pi\}$ нельзя вставить рациональное число. Аналогично для $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: между множествами $A = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid x < \pi\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid x > \pi\}$ нельзя вставить число из $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Иррациональность и транцендентность числа π считается известной.

(ii) для поля рациональных функций: рассмотрим множество чисел и множество многочленов вида $ax+b, a > 0$. Любой такой многочлен больше любого числа, однако нет рациональной функции, которая больше всех чисел и меньше всех таких многочленов.

Модели множества вещественных чисел. Под моделью мы будем понимать какое-то упорядоченное поле, на котором действует аксиома непрерывности. Рассмотрим некоторые из них.

(i) Множество десятичных чисел. Это конструкция изучалась в школе.
(ii) Множество чисел по заданному основанию (двоичные, троичных и т.д.). Также изучалась в школе.
(iii) Числовая прямая. Также изучалась в школе.
(iv) Дедекиндовы сечения. Ограничимся лишь определением: *сечением Дедекинда* называется разбиение множества $\mathbb{Q}$ на два подмножества $\mathbb{Q}_l$ и $\mathbb{Q}_r$ таким образом, чтобы всякое число

из $\mathbb{Q}_l$ было бы меньше всякого числа из $\mathbb{Q}_r$. На множестве таких сечений можно ввести струкутру упорядоченного множества и проверить аксиому непрерывности (см. [2]).

(v) Множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Здесь две фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их объединение - снова фундаментальная последовательность. Об этом речь пойдёт позже.

Упражнение. Проверьте аксиомы упорядоченного поля, а также аксиому непрерывности для моделей десятичных, двоичных чисел, а также для модели числовой прямой (как определить умножение?).

Лекция 2

Ограниченные множества

Определение. *Множеством $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что для всякого $a \in A$ верно, что $a \leqslant C$. Число C при этом называется верхней границей или гранью.*

На языке кванторов это определение запишется следующим образом: $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \leqslant C$. Отрицание этого определения даёт определение *неограниченного сверху множества.*

Определение. *Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется неограниченным сверху $\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R}\ \exists a \in A : a > C$.*

Аналогичным образом определяются ограниченные (существует *нижняя граница* $C \in \mathbb{R}$) и неограниченные снизу множества (нижней границы не существует).

Определение. *Множеством $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограниченно и сверху и снизу. Можно также сказать, что $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным $\Leftrightarrow \exists C > 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : |a| \leqslant C$.*

Определение. *Число $M \in A$ называется максимальным или наибольшим элементом множества A, если оно является верхней границей множества A, то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \leqslant M$. Число $m \in A$ называется минимальным или наименьшим элементом множества A, если оно является нижней границей множества A, то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \geqslant m$.*

Обозначения. $M = \max\{x \in A\} = \max_{x \in A} x;\ m = \min\{x \in A\} = \min_{x \in A} x$.

Упражнение. Из аксиомы порядка выведите единственность наибольшего и наименьшего элементов ограниченного множества (при условии, что они есть).

Примеры: наибольшим элементов множества *неположительных вещественных чисел* является 0, наименьшего элемента нет (множество не ограниченно снизу); множество же *отрицательных чисел* не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов (наибольшим элементом должен был бы быть 0, но он не является отрицательным числом), наименьшего элемента нет, т.к. множество не ограниченно снизу.

Предыдущий пример показывает, что ограниченные множества не очень удобно описывать при помощи их наибольших и наименьших элементов (т.к. их может не быть). Однако, если множество ограничено, то всегда есть границы. Дадим следующие определения.

Определение. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется супремумом или точной верхней гранью множества $A \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \leqslant M) \wedge (\forall y < M : \exists x \in A : x > y)$. Число $m \in \mathbb{R}$ называется инфимумом или точной нижней гранью множества $A \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \geqslant m) \wedge (\forall y > m : \exists x \in A : x < y)$.*

Обозначения. $M = \sup A;\ m = \inf A$.

Теорема. *У любого непустого ограниченного сверху множества есть супремум. У любого непустого ограниченного снизу множества есть инфимум.*

Доказательство. Доказательство проведём для случая ограниченного сверху множества. Для ограниченного снизу множества доказательство аналогично.

Пусть A^+ – множество верхних границ множества A. Оба множества A и A^+ не пустые и при этом выполнено условие аксиомы непрерывности: все элементы множества A не больше всех элементов множества A^+. Значит, в силу аксиомы непрерывности существует число M

такое, что $\forall x \in A, y \in A^+ : x \leqslant M \leqslant y$. По построению, $M = \sup A$, т.к. $\forall x \in A : x \leqslant M$. Это действительно наименьшая верхняя граница, т.к. $\forall y \in A^+ : y \geqslant M$ $\square$.

На самом деле верна следующая теорема

Теорема. *Теорема о существовании верхней грани эквивалентна аксиоме непрерывности. Иными словами, упорядоченное множество, у которого каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань есть $\mathbb{R}$.*

Аксиома Архимеда

Несмотря на своё название, аксиома Архимеда в современном изложении является теоремой, выводящейся из аксиом вещественных чисел.

Теорема (аксиома Архимеда). *Для любых положительных вещественных чисел a и b верно, что среди чисел*

$$a, 2a(= a + a), 3a(= a + a + a), \ldots, na, \ldots$$

найдутся числа, большие b.

Доказательство. Рассмотрим множество A чисел вида na. Предположим, что среди них нет ни одного числа, большего b. Рассмотрим множество B вещественных чисел, больших всех чисел из A. Множества A и B не пустые, т.к. $b \in B$. Все элементы множества A меньше всех элементов B. Значит, по аксиоме непрерывности между A и B найдется промежуточное число c такое, что $x \leqslant c \leqslant y, x \in A, y \in B$. Число c – точная верхняя грань A по построению. Однако, $d = c - a \in B$ по построению. Действительно, $c > a + \ldots + a$ для любого количества слагаемых. Это противоречит тому, что $c = \sup A$ $\square$.

Определение.*Упорядоченное поле, удовлетворяющее аксиоме Архимеда, называется архимедовым.*

Примеры: архимедовы поля: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})$; неархимедово поле: множество рациональных функций.

Упражнение. Убедитесь в том, что предыдущие примеры справедливы (случай $\mathbb{R}$ уже разобран).

Лекция 3

Другие следствия из аксиом вещественных чисел

Сформулируем и докажем некоторые следствия из аксиом вещественных чисел.

(i) Следующие элементы единственны: 0, 1, противоположный и обратный к данному элементы.

$\triangleright$ Доказательство проведем лишь для 0 и противоположного элемента. Доказательство для 1 и обратного элемента аналогично. От противного. Пусть есть два нулевых элемента 0_1 и 0_2 и для данного $x \in \mathbb{R}$ пусть есть два противоположных элемента $(-x)_1$ и $(-x)_2$. Тогда

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

$$(-x)1 = (-x)_1 + 0 = (-x)_1 + (x + (-x)_2) = ((-x)_1 + x) + (-x)_2 = 0 + (-x)_2 = (-x)_2. \triangleleft$$

(ii) К обеим частям равенства можно добавлять число, сохраняя равенство. Обе части равенства можно умножать на число, сохраняя равенство.

(iii) Уравнение $a + x = b$ имеет решение $x = b - a$, причём единственное. Уравнение $a \cdot x = b$ имеет при $a \neq 0$ решение $x = b \cdot a^{-1}$, причём единственное.

$$\triangleright\ a + x = b \Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow a + (-a) + x = b - a \Leftrightarrow x = b - a. \triangleleft$$

(iv) Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. Если $x \cdot y = 0$,то либо $x = 0$, либо $y = 0$.

$$\triangleright\ x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) \Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

Если $x \cdot y = 0$ и $y \neq 0$,то $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$. $\triangleleft$

(v) Справедливы равенства $-x = (-1) \cdot x; (-1) \cdot (-1) = 1; (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

$\triangleright$ Докажем лишь первое равенство

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0. \triangleleft$$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y); (x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow x < z; (x \leqslant y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z.$

(vii) $x < y \Rightarrow x + z < y + z; x > 0 \Rightarrow -x < 0; (a \geqslant b) \wedge (c \geqslant d) \Rightarrow a + c \geqslant b + d; (a \geqslant b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d; (a > b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d;$

(viii) $(x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0; (x > 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow xy < 0; (x > y) \wedge (z > 0) \Rightarrow xz > yz; (x > y) \wedge (z < 0) \Rightarrow xz < yz;$

(ix) $1 > 0; x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0; x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0; (x > 0) \wedge (y > x) \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}.$

$\triangleright$ Если $1 < 0$, то $1 \cdot 1 > 0$ и $1 > 0$. Если $1 = 0$, то $x \cdot 1 = x$ и $x \cdot 0 = 0$, отсюда $x = 0$. Значит, $1 > 0$. Из $x > 0$ и $x^{-1} < 0$ следует $x \cdot x^{-1} < 0$, что противоречит $1 > 0$. $\triangleleft$

Натуральные числа

Нам понадобится более строгое определение натуральных чисел, чем то, которым вы пользовались в школе. Вообще говоря, натуральные числа определяются с помощью *аксиом Пеано*, о которых пойдёт речь в курсе по дискретной математике и топологии. Мы не будем вовсе касаться аксиоматики Пеано натуральных чисел. Корректность определения, которое последует ниже (т.е. то, что определённые нами натуральные числа действительно удовлетворяют аксиомам Пеано), будет доказана в курсе "Введение в дискретную математику и топологию".

Начнём с определения индуктивных множеств.

Определение.*Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если* $\forall a \in A$: $a + 1 \in A$.

Примеры. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Лемма. *Пересечение любого числа индуктивных множеств или пусто или само является индуктивным множеством.*

Доказательство. Пусть $A = \cap A_\alpha$, где α пробегает некоторое множество. Тогда
$$a \in A \Rightarrow \forall\alpha\colon a \in A_\alpha \Rightarrow \forall\alpha\colon (a+1) \in A_\alpha \Rightarrow (a+1) \in A.\square$$

Определение.*Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ — это пересечение всех индуктивных подмножеств $\mathbb{R}$, содержащих 1.*

Следствие из определения (принцип математической индукции). *Если $E \subset \mathbb{N}, 1 \in E$ и E — индуктивное множество, то $E = \mathbb{N}$.*

Напомним, что множество называется линейно упорядоченным, если любые два его элемента сравнимы.

Определение. *Назовём линейно упорядоченное множество вполне упорядоченным, если в каждом его непустом подмножестве есть наименьший.*

Теорема.*Множество $\mathbb{N}$ вполне упорядочено.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in A$, то $\min A = 1$. Если $1 \notin A$, то $1 \in \mathbb{N} \setminus A$. рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \setminus A$. Покажем, что в B найдётся такой элемент n, что $1, \ldots, n \in B, n+1 \in A$. В самом деле, если такого n не существует, то множество B индуктивно и, следовательно, совпадает с $\mathbb{N}$. Но тогда $A = \mathbb{N} \setminus B = \varnothing$. Противоречие. Тогда n существует и значит $\min A = n+1$ $\square$.

Замечание. Множество $\mathbb{Q}$ не является вполне упорядоченным.

Теорема. *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве $\mathbb{N}$ есть наибольший элемент.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{N}$ - такое подмножество. По теореме о верхней грани существует $c = \sup E$. По определению верхней грани, в E найдётся число n такое, что $c-1 < n \leqslant c$. Тогда $n = \max E$ т.к. все натуральные числа, большие n, не меньше $n+1$, а $m+1 > c$. $\square$.

Следствие. *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

Доказательство. Иначе существовало бы наибольшее натуральное число. Но $n < n+1$. $\square$.

Корректно определив $\mathbb{N}$, мы теперь сможем определить $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. В первом случае это натуральные числа, 0, и противоположные к натуральным, во втором случае добавим к $\mathbb{Z}$ ещё все обратные числа (кроме нуля) к числам из $\mathbb{Z}$ и добавим все произведения обратных на натуральные.

Следствие. *В любом непустом ограниченном снизу (сверху) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наименьший (наибольший) элемент.*

Доказательство. Аналогично теореме о наибольшем элементе непустого ограниченного сверху подмножества $\mathbb{N}$. $\square$.

Аксиома Архимеда уточнённая (принцип Архимеда). Для любого $h > 0$ и для любого $a \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что справедливы неравенства $(n-1)h \leqslant a < nh$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{n \in \mathbb{Z}\colon a/h < n\}$. Оно ограничено снизу. Оно не пусто. В самом деле, если $a > 0$, то не пусто по аксиоме Архимеда. Если $a < 0$, то оно не пусто так как содержит ноль. Если $a = 0$, то $E = \mathbb{N}$. Пусть $m = \min E$ (такой элемент обязательно есть по следствию об ограниченном снизу подмножестве $\mathbb{Z}$). Тогда $m - 1 \leqslant a/h < m$ $\square$.

Вот несколько следствий из принципа Архимеда.

Следствие 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n^{-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^{-1} \in (0, \varepsilon)$.

Доказательство. Применим принцип Архимеда к $a = 1, h = \varepsilon$. Тогда найдется n такое, что $1 < \varepsilon n$, отсюда $0 < 1/n < \varepsilon$. $\square$

Следствие 2. Между двумя любыми вещественными числами есть рациональное число, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ существует такое $r \in \mathbb{Q}$, что $a < r < b$.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}, b > a$. Выберем m так, чтобы $0 < h = m^{-1} < \varepsilon = b - a$. Найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что

$$\frac{n-1}{m} \leqslant a < \frac{n}{m}.$$

Теперь $\frac{n}{m} < b$, иначе получилось бы, что $\frac{n-1}{m} \leqslant a < b \leqslant \frac{n}{m}$, а это противоречит $0 < 1/m < b - a$. Таким образом, $r = n/m$ - искомое рациональное число. $\square$.

Следствие 3. Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leqslant x < k + 1$.

Непосредственно следует из принципа Архимеда. Число k называется целой частью, число $x - k$ называется дробной частью.

Лекция 4
Последовательности

Определение. *Последовательность - функция натурального аргумента, т.е. $f\colon \mathbb{N} \to X$, где X - некоторое множество.*

Обозначение. Когда говорят о последовательностях, то аргумент обычно пишут не в скобках, а в виде индекса: x_n. Часто саму последовательность обозначают таким образом $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Рассмотрим два вида последовательностей - последовательности вещественных чисел и последовательности множеств.
(i) Последовательности вещественных чисел: $a_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
(ii) последовательности множеств: $A_n\colon \mathbb{N} \to 2^X$ (здесь 2^X - обозначение множества всех подмножеств множества X). Будем также говорить, что A_n - последовательность вложенных множеств, если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$.

Определение. Будем говорить, что последовательность чисел x_n, стремится к нулю, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\colon |x_n| < \varepsilon.$$

Обозначение. $x_n \to 0$

Примеры. $x_n = 0, x_n = 1/n, x_n = q^n, |q| < 1$.

Теорема о вложенных промежутках. В $\mathbb{R}$ любая последовательность вложенных отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n]$ имеет непустое пересечение. Если их длины $b_n - a_n$ стремятся к нулю, то это пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ состоит из единственной точки.

Доказательство. Рассмотрим два множества: множество A, состоящее из точек a_n (левых концов отрезков) и множество B, состоящее из точек b_n (правых концов отрезков). Заметим, что какое-то из этих множеств вполне может оказаться конечным. Множества A и B удовлетворяют условиям аксиомы непрерывности (они не пустые и каждое a_m не превосходит каждого b_n), поэтому существует число c: $a_m \leqslant c \leqslant b_n$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует искомое включение $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. Единственность точки c следует из $b_n - a_n \to 0$. Если бы было две таких различных точки $c_1 < c_2$, то из неравенств $a_n \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b_n$ следовало бы неравенство $b_n - a_n > c_2 - c_1 > 0$, которое противоречит $b_n - a_n \to 0$. $\square$

Замечание. Последовательность вложенных интервалов не обязательно имеет общую точку. Например, пересечение вложенных интервалов $(0,1) \supset (0,1/2) \supset (0,1/3) \supset \ldots \supset (0,1/n) \supset \ldots$ является пустым множеством.

Открытые и замкнутые множества

Определение. *Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\varepsilon-$окрестность точки x_0 - это интервал $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.*

Заметим, что пересечение двух окрестностей точки x также является окрестностью этой точки.

Определение. *Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой A, если в любой окрестности точки x найдется $y \in A, y \neq x$.*

Эквивалентно можно сказать, что точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества A, если в любой окрестности точки x найдется бесконечное множество точек из A. Действительно, пусть в любой окрестности точки x найдется $y \in A, y \neq x$. Возьмём какую-то окрестность U' точки x, зафиксируем $y' \in A \cap U', y' \neq x$, потом возьмём окрестность $U'' \subset U'$ точки x, не содержащую точку y' (почему так можно сделать?), в U'' по предположению есть точка

$y'' \in A \cap U'', y'' \neq x$. По такой схеме мы найдём бесконечное множество точек, принадлежащих $A \cap U'$.

Определение. *Точки множества, не являющиеся предельными, называются изолированными. Изолированная точка A - точка, в некоторой окрестности которой кроме неё нет других точек из A.*

Лемма (о предельной точке). *Всякое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Дано ограниченное бесконечное множество E . Пусть отрезок $[a_1, b_1], b_1 > a_1$ содержит E . Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ на два отрезка: $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. По крайней мере одно из множеств $L_1 \cap E$ или $R_1 \cap E$ содержит бесконечное множество точек. Пусть например, это будет множество $R_1 \cap E$. Обозначим отрезок R_1 через $[a_2, b_2]$. Разделим его пополам на отрезки L_2 и R_2, снова по крайней мере одно из множеств $L_2 \cap E$ или $R_2 \cap E$ содержит бесконечное множество точек, выберем его и повторим эту процедуру бесконечно много раз. Мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины этих отрезков равны $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \to 0$. Итак, пересечение всех этих отрезков состоит из единственной точки c. Это есть предельная точка множества E: любая окрестность точки c содержит все отрезки $[a_n, b_n]$ с достаточно большими номерами, на каждом такой отрезке есть бесконечное количество точек множества E. $\square$.

Определение. *Множество U называется открытым, если для любой точки $x \in U$ существует окрестность точки x целиком лежащая в U. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Точка $x \in U$ называется внутренней точкой множества U', если найдётся окрестность U' точки x, целиком лежащая в U. Таким образом, множество U открытое, если все его точки являются внутренними.*

Примеры: $\emptyset, \mathbb{R}$ одновременно и замкнутые, и открытые; $[a, b], [a, \infty), \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ - замкнутые множества, $(a, b), (-\infty, b)$ - открытые множества. Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ не замкнуты и не открыты.

Теорема. Пусть A $-$ открытое множество, B $-$ замкнутое множество. Тогда 1)$A \setminus B$ $-$ открытое множество. 2)$B \setminus A$ $-$ замкнутое множество.

На самом деле верна следующее следствие, которое часто даётся в качестве определения открытого и замкнутого множества в курсе топологии.

Следствие. Пусть A $-$ открытое множество, тогда $\mathbb{R} \setminus A$ $-$ замкнутое. Пусть B $-$ замкнутое множество, тогда $\mathbb{R} \setminus B$ $-$ открытое.

Иными словами, дополнение замкнутое множество - это дополнение до открытого и наоборот.

Упражнение. Докажите это следствие.

Определение. *Открытое множество называется A связным, если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств, каждое из которых не пусто и не совпадает с самим A.*

Примеры. $\mathbb{R}, (-\pi, \pi)$ связные, множество $(0, 1) \cup (1, 2)$ не связно.

Вернёмся к связным множествам позднее, а сейчас рассмотрим множество предельных точек некоторого подмножества $\mathbb{R}$. Обозначим через A' множество предельных точек множества A. Заметим, что не верны включения $A' \subset A, A \subset A'$ (почему?).

Определение. *Замыкание множества A есть объединение A с множеством его предельных точек A'.*

Обозначение. Замыкание будем обозначать символом $\bar{A}$, т.е. $\bar{A} = A \cup A'$.

Всюду плотные и нигде не плотные множества

Определение. *Подмножество A некоторого замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется всюду плотным в X, если замыкание $\bar{A}$ множества A совпадает с X. Подмножество A некоторого замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется нигде не плотным, если внутри любого интервала $U \subset X$ есть меньший интервал $V \subset U$ такой, что $A \cap V = \emptyset$.*

Иными словами, множество A всюду плотно на X, если внутри любого интервала $U \subset X$ есть точка из A.

Примеры.

1. Множества рациональных и иррациональных чисел всюду плотны в $\mathbb{R}$.
2. Существует множество обладающее следующими свойствами: дополнение к нему всюду плотно, само оно нигде не плотно. Бывают также замкнутые нигде не плотные множества и открытые всюду плотные множества. Не бывает открытых нигде не плотных множеств.
3. Дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно.

Лекция 5

Продолжим обсуждение плотных множеств и нигде не плотных множеств. Начнём с определения покрытия.

Определение. *Пусть дано множество A и дана система множеств U_α, причём $A \subset \cup_\alpha U_\alpha$. Тогда говорят, что система этих множеств образует покрытие множества A: $\forall x \in A\ \exists U_\alpha : x \in U_\alpha$.*

Теорема Бэра о категориях. *Отрезок не может быть покрыт объединением счётного числа нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Пусть $[0,1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$, где все множества U_n нигде не плотны в $\mathbb{R}$. Тогда выберем отрезок $\Delta_1 \subset [0,1]$, на котором нет точек из U_1, потом выберем отрезок $\Delta_2 \subset \Delta_1$, на котором нет точек из U_2 и так далее. Как это сделать? В определении нигде не плотного множества стоят интервалы, поэтому будем выбирать интервалы, а потом в каждом из них выберем отрезок, чуть поменьше. Последовательность вложенных отрезков Δ_n имеет общую точку, эта точка не принадлежит ни одному из множеств U_n, следовательно предположение $[0,1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ не верное. $\square$.

Определение. *Множества, которые могут быть покрыты объединением счётного числа нигде не плотных множеств, называются множествами 1-й категории по Бэру, или ещё тощими множествами. Остальные множества - множества 2й категории, или тучными.*

Таким образом, мы доказали, что отрезок - множество второй категории по Бэру.

Канторво множество

Важную роль в разнообразных конструкциях играют множества, которые называют канторовыми множествами. Опишем их общую конструкцию. Возьмём отрезок Δ_1 и выберем интервал U_1, так, чтобы его концы не совпадали с концами отрезка Δ_1. Множество $\Delta_1 \setminus U_1$ — это два отрезка, Δ_2 и Δ_3. Затем на каждом из этих отрезков выберем по интервалу $U_2 \subset \Delta_2$ и $U_3 \subset \Delta_3$ так, чтобы их концы не совпадали с концами отрезков Δ_3 и Δ_1. Множество $\Delta_1 \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U3)$ — объединение четырёх непересекающихся отрезков $\Delta_4, \ldots, \Delta_7$. Снова на каждом из них выберем по интервалу U_k и так далее. Предположим ещё, что мы так будем выбирать интервалы, что длины оставшихся отрезков будут стремиться к нулю. В результате получится последовательность непересекающихся интервалов U_k, их объединение — открытое множество U . Множество $\Delta_1 \setminus U_1$ — замкнутое. Например, оно содержит концы всех отрезков, мы их ни на каком шаге не выбросим. Этих концов отрезков — счётное число. Кроме того, $\Delta_1 \setminus U_1$ содержит ещё континуальное множество точек (почему?). Проделав эту процедуру бесконечное число раз (как описать строго?), мы получим некоторое множество. Это и есть *канторово множество.* Самым знаменитым канторовым множеством является случай, когда $\Delta_1 = [0,1]$, а в качестве каждого интервала берётся «средняя треть». Часто именно это множество называется канторовым, на английском языке оно называется *Middle Third Cantor Set.*

На семинарах и в ДЗ2 мы докажем, что любое канторово множество континуальное, замкнутое, нигде не плотное, не содержит изолированных точек.

Замыкание множеств

На прошлой лекции были определены понятия множества предельных точек множества и замыкания множеств. Рассмотрим их основные свойства.

Утверждение 1. *Множество A' предельных точек множества A замкнуто.*

Доказательство. В самом деле, пусть A' – множество предельных точек множества A. Пусть x – предельная точка множества A'. Тогда в любой окрестности $U(x)$ точки x лежит точка $y \in A'$, предельная точка множества A. Возьмём окрестность $U(y)$ точки y, целиком лежащую в $U(x)$ и не содержащую x. По определению предельной точки там лежит точка $z \in A$. Эта точка лежит в $U(x)$ и не совпадает с x. Мы доказали, что в любой окрестности точки x (предельной для A') лежит точка $y \neq x, y \in A$. Значит, $x \in A'$. Итак, каждая предельная точка множества A' ему принадлежит, множество A' – замкнуто. $\square$

Утверждение 2. *Множество $\bar{A}$ – замкнуто.*

Доказательство. Предельная точка множества $A \cup B$ – либо предельная точка для A, либо для B, либо для обоих множеств (если не так, то она изолированная и для A и для B, поэтому и для $A \cup B$). Поэтому предельная точка для $\bar{A} = A \cup A'$ это либо предельная точка x для A, тогда $x \in A'$, либо $x \in (A')'$, тогда $x \in A'$ по утверждению 1. $\square$

Утверждение 3. *Объединение любого набора открытых множеств – открытое множество. Пересечение конечного набора открытых множеств – открытое множество. Объединение конечного набора замкнутых множеств – замкнутое множество. Пересечение любого набора замкнутых множеств – замкнутое множество.*

Упражнение. Докажите утверждение 3.

Пример. $\cap_{n=1}^{\infty}(-n^{-1}, n^{-1}) = \{0\}$, т.е. пересечение счётного набора открытых множеств не обязательно открытое множество.

На семинарах мы докажем

Утверждение 4. *Каждое непустое открытое множество U на прямой является объединением не более чем счётного набора непересекающихся открытых промежутков.*

Компактные множества (компакты)

Нам понадобятся следующие определения.

Определение. *Любое подмножество покрытия, если оно также является покрытием, называется подпокрытием. Покрытие называют открытым, если все множества U_α открытые. Покрытие называют конечным, если оно содержит конечное множество множеств U_α.*

Лекция 6

Докажем следующую фундаментальную лемму.

Лемма Гейне – Бореля. *Любое открытое покрытие $\cup_\alpha U_\alpha$ отрезка Δ имеет конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1], b_1 > a_1$ покрыт бесконечной системой открытых множеств U_α. Пусть у этой систему не существует конечного подпокрытия, т.е. нельзя выбрать конечный набор $U_k, k = 1, 2, \ldots, N$ открытых множеств, также покрывающее отрезок Δ_1. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ на два отрезка: $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. По крайней мере для одного из отрезков L_1 или R_1 не существует конечного подпокрытия из изначального покрытия. Пусть например, это R_1. Обозначим отрезок R_1 через $[a_2, b_2]$. Разделим его пополам на отрезки L_2 и R_2, снова для одного из отрезков L_2 или R_2 не существует конечного подпокрытие из изначального покрытия. Выберем его и повторим эту процедуру бесконечно много раз. Мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины этих отрезков равны $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Эти отрезки строились так, чтобы ни один из них не мог быть покрыт конечным набором множеств из изначального покрытия. По лемме о вложенных отрезках пересечение всех этих отрезков состоит из единственной точки c. Эта точка c принадлежит какому-то открытому множеству U из изначального покрытия. Вместе с точкой c открытое множество U содержит и некоторую окрестность точки c. Теперь, при достаточно больших n отрезки $[a_n, b_n]$ все покрыты одним единственным открытым множеством U из покрытия. Полученное противоречие доказывает лемму Гейне–Бореля. $\square$

Определение. *Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется компактным (или компактом), если из любого его покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.*

Таким образом, мы доказали, что отрезок компактен. Также из леммы Гейне-Бореля следует, что любое ограниченное замкнутое множество является компактом. Любой компакт на прямой - обязательно ограниченное замкнутое множество. Это будет доказано позднее.

Предел последовательности

Определение. *Число A называется пределом последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если вне любой окрестности точки A лежит лишь конечное множество элементов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, или, что то же самое, все элементы $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с достаточно большими номерами n лежат внутри этой окрестности.*

Обозначение. $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. Также часто пишут $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

На языке кванторов: $\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$.

Определение. *Будем говорить, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $+\infty$, если $\forall C\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n > C$. Аналогично определяется сходимость к $-\infty$: $x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall C\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n < C$.*

Заметим, что натуральное число N зависит от числа ε и от самой последовательности.

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ может не сходиться ни к какому числу A. На языке кванторов это означает

$$\forall A\ \exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |x_n - A| < \varepsilon$$

Определение. *Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется сходящейся, если её предел равен какому-то числу. В остальных случаях последовательность называется расходящейся. Причём в случае расходящейся последовательности есть дихотомия: либо такого числа, которому послевательность сходилась бы не существует, либо предел последовательности равен $\pm\infty$.*

Утверждение. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to A$ при $n \to \infty$. Выберем $\varepsilon = 1$, построим по этому ε число N по определению сходимости. Теперь все элементы последовательности с номерами больше N лежат в $1-$окрестности точки A,конечное множество точек $\{x_1, \ldots, x_N\}$ ограничено, значит, вся последовательность ограничена.$\square$

Утверждение. *Если последовательность сходится, то её предел единственный.*

Доказательство. В самом деле, пусть у последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ есть 2 разных предела, A и B. Без потери общности пусть, например, $A < B$. Положим $\varepsilon = (B - A)/3$ и рассмотрим $\varepsilon-$окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $U_\varepsilon(B)$ точек A и B. По построению, эти окрестности не пересекаются. По определению предела вне окрестности $U_\varepsilon(A)$ лежит лишь конечное число элементов последовательности, и вне окрестности $U_\varepsilon(B)$ лежит лишь конечное число элементов последовательности. Значит, их всего конечное число, а это противоречит определению последовательности. $\square$

Теорема. *Пусть заданы последовательности x_n и y_n, причём $x_n \geqslant y_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Пусть обе последовательности x_n и y_n сходятся:* $\lim_{n\to\infty} x_n = A, \lim_{n\to\infty} y_n = B$. *Тогда $A \geqslant B$.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда $B > A$. Положим $\varepsilon = (B - A)/3$ и рассмотрим $\varepsilon-$окрестности точек A и B. По построению, эти окрестности не пересекаются, причём все точки из окрестности $U_\varepsilon(B)$ строго больше (лежат правее) всех точек из окрестности $U_\varepsilon(A)$. Но $x_n \to A, y_n \to B$ при $n \to \infty$, поэтому при достаточно больших значениях n справедливы включения $x_n \in U_\varepsilon(A), y_n \in U_\varepsilon(B)$. Отсюда $x_n < y_n$ при достаточно больших n, что противоречит предположению теоремы. $\square$

Замечание 1. Для справедливости утверждения теоремы достаточно, чтобы неравенство $x_n \geqslant y_n$ было справедливо лишь для достаточно больших значений n.

Замечание 2. Если вместо $x_n \geqslant y_n$ справедливо строгое неравенство $x_n > y_n$, то отсюда также следует $A \geqslant B$ (из теоремы), но может не следовать $A > B$. Контрпример: $x_n = n^{-1}, y_n = -n^{-1}$. Здесь $x_n > y_n$, однако $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема о двух милиционерах. *Пусть даны три последовательности, причём $x_n \geqslant y_n \geqslant z_n$ и пусть существуют пределы* $\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} z_n$ *и* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$. *Тогда существует предел* $\lim_{n\to\infty} y_n$ *и он также равен A.*

Доказательство. Запишем определения $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : (|x_n - A| < \varepsilon) \wedge (|z_n - A| < \varepsilon).$$

Но тогда для этих ε и N имеем: $A-\varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < A+\varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{n\to\infty} y_n = A$. $\square$

Арифметические операции с переделами

Пусть заданы последовательности x_n и y_n. Тогда определены также следующие последовательности

$$(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{где } \alpha\in\mathbb{R}, \quad (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Последняя последовательность определена, если $y_n\neq 0$.

Теорема. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = A, \lim_{n\to\infty} y_n = B$. *Тогда*

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha A, \quad 2)\ \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = A+B, \quad 3)\ \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = AB,$$

и если $y_n, B\neq 0$, *то* 4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$.

Следствие. *Операция взятия предела линейна, т.е.* $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n) = \alpha A+\beta B$.

Доказательство. Докажем лишь 1) и 3) свойства.

1) По определению $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ имеем $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N : |x_n-A|<\varepsilon$. Нужно показать, что $\forall\varepsilon_0>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall n>N_0 : |\alpha x_n-\alpha A|<\varepsilon_0$. Если $\alpha=0$, то утверждение очевидно. Пусть $\alpha\neq 0$. Выберем какое-то $\varepsilon_0>0$. Рассмотрим число $\varepsilon_0/|\alpha|$. Так как число ε было выбрано произвольно, возьмем в качестве него число $\varepsilon=\varepsilon_0/|\alpha|$ и построим по нему соответствующее число $N_0 = N(\varepsilon_0/|\alpha|)$. При всех $n>N_0$ будет справедливо неравенство $|x_n-A|<\varepsilon_0/|\alpha|$, эквивалентное $|\alpha x_n-\alpha A|<\varepsilon_0$.

3) Имеем $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1 : |x_n-A|<\varepsilon$ и $\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2 : |y_n-B|<\varepsilon$. Т.к. обе последовательности сходятся, то они ограничены и значит найдется такое $C>0$, что $|x_n|, |y_n|\leqslant C$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда следует, что также $|A|, |B|\leqslant C$. Выберем какое-то $\varepsilon_0>0$ и рассмотрим число $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2C}$. Построим по нему соответствующие числа $N_1(\frac{\varepsilon_0}{2C})$ и $N_2(\frac{\varepsilon_0}{2C})$. Положим $N_0=\max\{N_1,N_2\}$. Заметим, что при $n>N_0$ верно, что $|x_n-A|<\frac{\varepsilon_0}{2C}$ и $|y_n-B|<\frac{\varepsilon_0}{2C}$. Тогда

$$|x_ny_n-AB| = |x_ny_n-Ay_n+Ay_n-AB| \leqslant |x_ny_n-Ay_n|+|Ay_n-AB| =$$
$$= |y_n||x_n-A|+|A||y_n-B| \leqslant C|x_n-A|+C|y_n-B| < \frac{C\varepsilon_0}{2C}+\frac{C\varepsilon_0}{2C} < \varepsilon_0.$$

Таким образом, $|x_ny_n-AB|<\varepsilon_0$ при $n>N_0$. $\square$

Упражнение. Докажите свойства 2) и 4).

Лекция 7

Подпоследовательности

Определение. *Последовательность строго возрастает, если $x_{n+1} > x_n$ при $n \in \mathbb{N}$.*

Пусть у нас есть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Предположим, задана строго возрастающая последовательность $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Тогда можно рассмотреть композицию отображений $k \mapsto n_k$ и $n \mapsto x_n$, ставящую в соответствие каждому натуральному числу k элемент последовательности $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Такая последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Выбирая различные n_k: получаем различные подпоследовательности $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Теорема. *Если последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то и каждая подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ сходится, причём к тому же самому пределу.*

Доказательство. Это утверждение легко следует из определения сходимости $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ к числу A в виде «вне любой окрестности точки A лежит лишь конечное множество элементов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$». Ясно, что если вне окрестности лежит конечное множество элементов последовательности, то элементов подпоследовательности вне этой окрестности лежит также конечное множество, «ещё меньше» элементов. □

Теорема. *Если подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ содержит все элементы последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кроме конечного их числа, то из сходимости подпоследовательности следует сходимость самой последовательности.*

Доказательство. Это утверждение легко следует из того же определения сходимости «вне любой окрестности точки A лежит лишь конечное множество элементов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$». Если последовательности отличаются конечным множеством элементов, то ясно, что если одна из последовательностей сходится к A, то и другая тоже. □

Теорема (лемма Больцано - Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Так как элементов последовательности бесконечное (счётное) множество, то либо множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно, либо какое-то из значений последовательность принимает бесконечное количество раз (возможно, таких значений много). В этом случае можно выбрать постоянную подпоследовательность, которая, очевидно, сходится. Если же множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно, то воспользуемся теоремой о том, что каждое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку A. Эта предельная точка и есть искомый предел подпоследовательности. Для указания конкретной подпоследовательности, сходящейся к этой предельной точке A, надо положить $\varepsilon_1 = 1$, выбрать ε_1-окрестность $U_{\varepsilon_1}(A)$, в ней найти элемент x_{n_1} (там лежит бесконечно много элементов последовательности), потом надо положить $\varepsilon_2 = 1/2$, выбрать меньшую ε_1-окрестность $U_{\varepsilon_1}(A)$, в ней найти элемент x_{n_2} , проследив, чтобы было $n_2 > n_1$, и так далее. Полученная подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к A. □

Фундаментальные последовательности

Определение. *Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется фундаментальной последовательностью или последовательность Коши если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Перечислим основные свойства фундаментальных последовательностей

Лемма 1. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, по определению фундаментальности найдется такое N, что при $n, m > N$ расстояние между элементами последовательности меньше 1. Таким образом, все $xn, n > N+1$ лежат в 1-окрестности числа x_{N+1}. Теперь конечное множество $\{x_1, \ldots, x_N\}$ ограничено, поэтому и вся последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена. $\square$

Лемма 2. *Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к числу A, то сама последовательность сходится к A.*

Доказательство. Зададимся $\varepsilon > 0$. По числу $\varepsilon/2$ построим N из условия фундаментальности: при $n, m > N$ справедливо соотношение $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$. По условию сходимости подпоследовательности $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ к пределу A, существует такое k_0, что при всех $k > k_0$ справедливы соотношения $|A - x_{n_k}| < \varepsilon/2$. Теперь пусть число $k_1 > k_0$ такое, что $n_{k_1} > N$. Тогда $|A - x_{n_{k_1}}| < \varepsilon/2$ и при всех $n > k_1$ справедливы неравенства $|x_{n_{k_1}} - x_n| < \varepsilon/2$, следовательно, справедливо неравенство

$$|A - x_n| \leqslant |A - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \square$$

Теорема (Критерий Коши). *Всякая фундаментальная последовательность сходится, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. В одну сторону доказательство простое. Пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого N все элементы последовательности лежат в $\varepsilon/2-$окрестности точки A. Это значит, что начиная с этого N расстояние между элементами последовательности меньше ε. Фундаментальность сходящейся последовательности доказана.

Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность. Тогда по лемме 1 последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена. Теперь, по теореме Больцано–Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. По лемме 2 вся последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к тому же пределу. $\square$

Монотонные последовательности и теорема Вейерштрасса.

Определение. *Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно возрастает, если $x_{n+1} \geqslant x_n$ при $n \in \mathbb{N}$, последовательность строго возрастает, если$x_{n+1} > x_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Про монотонно возрастающую последовательность говорят «неубывающая последовательность». Аналогично, последовательность монотонно убывает, если $x_{n+1} \leqslant x_n$ при $n \in \mathbb{N}$, последовательность строго убывает, если $x_{n+1} < x_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Про монотонно убывающую последовательность говорят «невозрастащая последовательность». Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется монотонной, если она монотонно возрастает или монотонно убывает. Последовательность называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает или строго монотонно убывает.*

Теорема Вейерштрасса. *Ограниченная монотонная последовательность сходится. Более точно, невозрастающая ограниченная снизу последовательность сходится, неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится.*

Доказательство. Докажем только одно утверждение, что неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится. Случай ограниченной снизу последовательности аналогичен. Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — наша последовательность и пусть $x_{n+1} \geqslant x_n$. Множество значений этой последовательности ограничено сверху, значит, определено число $A = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Среди чисел $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ есть числа, для которых $x_n > A - \varepsilon$

(иначе число A не было бы точной верхней гранью чисел x_n). Пусть $x_N > A - \varepsilon$, тогда при всех $n > N$, во-первых, $x_n > A - \varepsilon$, во-вторых, $x_n \leqslant A$ (иначе A не было бы верхней границей для множества значений x_n). Из $x_n > A - \varepsilon$ и $x_n \leqslant A$ следует $|x_n - A| < \varepsilon$. $\square$

Также нам будет полезна следующее утверждение

Утверждение. *Всякая ограниченная возрастающая последовательность сходится к своей точной верхней грани, а всякая ограниченная убывающая последовательность сходится к своей точной нижней грани.*

Доказательство. Пусть $x_n \leqslant x_{n+1}$ и A — точная верхняя грань последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такое число N, что $x_N > A - \varepsilon$ (иначе A — не точная верхняя грань). Тогда $x_n > A - \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Кроме того, $x_n \leqslant A$ при всех n. $\square$

Частичные пределы.

Мотивация: разные подпоследовательности одной и той же последовательности могут сходиться к разным пределам (если последовательность не сходится). Пределы подпоследовательностей называются *частичными пределами.* Частичный предел — это величина, в любой окрестности которой находится бесконечное количество элементов последовательности. Частичные пределы называют также *предельными точками последовательности.* **Не путать с предельными точками множеств, в частности с предельными точками множества значений последовательности!**

Утверждение. *Множество частичных пределов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ замкнуто.*

Доказательство. В самом деле, пусть X — множество частичных пределов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть x — предельная точка множества X. Тогда в любой окрестности $U(x)$ точки x лежит точка $y \in X$, частичный предел последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Возьмём окрестность $U(y)$ точки y, целиком лежащую в $U(x)$. По определению частичного предела там лежит бесконечно много элементов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Все эти элементы последовательности лежат в $U(x)$. Значит, $x \in X$. $\square$

Среди частичных пределов можно выделить "наибольший"и "наименьший".

Определение. *Точная верхняя грань частичных пределов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется верхним пределом, точная нижняя грань частичных пределов последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется нижним пределом.*

Обозначения. $\limsup_{n\to\infty} x_n$ и $\liminf_{n\to\infty} x_n$ соответсвенно. Также используются обозначения $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Примеры. $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$, $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} n = +\infty = \liminf_{n\to\infty} n$.

Более того, верно, что

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{m\geqslant n} x_m) = \inf_n(\sup_{m\geqslant n} x_m) \text{ и } \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{m\geqslant n} x_m) = \sup_n(\inf_{m\geqslant n} x_m).$$

Мы докажем эти утверждения на семинарах.

Очевидно также, что $\limsup_{n\to\infty} x_n \geqslant \liminf_{n\to\infty} x_n$. Заметим, что если последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то пределы всех частичных последовательностей равны между собой, и значит, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$. На самом деле верно и обратное, т.е. верна

Теорема. *Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится тогда и только тогда, когда* $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $y_n = \inf_{m\geqslant n} x_m$, $z_n = \sup_{m\geqslant n} x_m$. Имеем

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n.$$

Применяя теорему о двух милиционерах получаем утверждение теоремы. $\square$

Лекция 8

Числовые ряды

Важную роль играют последовательности, заданные в виде сумм элементов других последовательностей. Рассмотрим последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ и напишем «бесконечную сумму»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

Это выражение называется числовым рядом или просто рядом. Однако, такое определение врядли можно считать строгим. Чтобы дать строгое определение ряда рассмотрим величину $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Она называется $n-$ой *частичной суммой.*

Определение. *(Числовым) рядом называется предел частичных сумм, т.е.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n$, *где* a_n *— элементы последовательности* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Определение. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм, иными словами, если существует предел* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ *. Этот предел* S *(если он существует) называется суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если этот предел не существует, то ряд называется расходящимся, сумма ряда в этом случае не определена. Наконец, если предел равен* $\pm\infty$, *то ряд называется расходящимся к* $\pm\infty$ *соответственно.*

Теорема. *Сходимость ряда не зависит от выбрасывания (добавления) конечного количества элементов.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\tilde{S}_n = \sum_{k=m+1}^{n+m} a_k$. Замети, что $\tilde{S}_n = S_{n+m} - S_m$. Утверждение следует т.к. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+m}$. $\square$

Замечание. Выбрасывание конечного количества элементов меняет сумму ряда!

Примеры. 1) *Телескопический ряд*: путь дана последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ называется *телескопическим.* Найдем его сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty}((a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_1) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - a_1,$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем что $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$. Таким образом, телескопический ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится образующая его последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) *Геометрический ряд*: он определяется как предел *геометрической прогрессии*, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

где $q \neq 1$. Если $|q| < 1$, то геометрический ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

3) *Гармонический ряд*: он определяется следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Мы покажем, что гармонический ряд является расходящимся (к $+\infty$).

Сейчас мы займёмся вопросами сходимости рядов.

Теорема (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то последовательность* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *инфинтезимальна, т.е.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Заметим, что $a_n = S_n - S_{n-1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0. \ \square$$

Замечание. Как показывает пример гармонического ряда, обратное к предыдущей теореме утверждение не верно.

Непосредственно из предыдущей теоремы получаем

Следствие (признак расходимости ряда). *Пусть последовательность* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *не инфинтезимальна, т.е.* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Примеры. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходятся.

Следующий критерий нужен для доказательства почти всех теорем о рядах, всех признаков сходимости и расходимости. Непосредственно к исследованию конкретных рядов критерий Коши, как правило, не применяется. Это просто перефразировка теоремы «последовательность сходится, если и только если она фундаментальна» для последовательности частичных сумм ряда.

Теорема. *Для того, чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m > 0, n > N \ |\sum_{k=n+1}^{n+m} a_n| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно заметить, $|S_{n+m} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+m} a_n|$ и воспользоваться критерием Коши для последовательностей. $\square$

Следствие. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Применим дважды признак Коши в разные стороны. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m > 0, n > N \ \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_n| < \varepsilon.$$

Поэтому, $\forall \varepsilon > 0$ можно взять то же самое $N\colon \forall m > 0, n > N$ справедливо $|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_n| < \varepsilon$. Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Определение. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится. Ряд сходится условно, если он сходится, но не сходится абсолютно.*

Следствие произносится теперь по-другому: *абсолютно сходящийся ряд сходится.* Заметим также, что если ряд сходится условно, то оба ряда, составленные из его членов одного знака, расходятся. Если бы ровно один из этих рядов сходился, то весь ряд бы расходился; если бы сходились оба, исходный ряд сходился бы абсолютно.

Примеры. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$ сходится абсолютно; мы скоро покажем, что *знакопеременный гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ сходится условно; ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ не сходится ни абсолютно, ни условно (он расходится).

Теорема. *Гармонический ряд расходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Положим $m = n$, тогда для каждого натурального n справедлива оценка

$$|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}| = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По критерию Коши гармонический ряд расходится. □

Арифметические свойства сходящихся рядов

Теорема. *Пусть ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся. Тогда для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ *тоже сходится.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться линейностью предела, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n$$

и взять в качестве $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности частичных сумм для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно. □

Пусть $K \subset \mathbb{N}$ — такое бесконечно подмножество натурального ряда, что $\mathbb{N} \setminus K$ тоже бесконечное. Пусть есть две последовательности, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Составим из них общую последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ по следующему правилу. На места из K поставим по очереди элементы последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, на места из $\mathbb{N} \setminus K$ — по очереди элементы последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Такое определение корректно.

Утверждение. *Если два из рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходятся, то и третий тоже сходится.*

Упражнение. Докажите это утверждение.

Замечание. В обратную сторону утверждение не работает: из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ не следует сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Утверждение. *Если вставить в ряд на произвольные места сколько угодно нулей, то сходимость/расходимость ряда сохранится.*

Это свойство эквивалентно следующему утверждению про последовательности: сходимость последовательности сохраняется, если повторить какие-то из её члены конечное число раз: последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $a_1, a_2, a_2, a_3, a_4, a_4, a_4, a_4, a_5, a_5, a_6, a_6, a_6, a_7, a_8, a_8, \ldots$ стремятся к пределу A одновременно.

Упражнение. Докажите оба этих утверждения.

Лекция 9

Ряды с положительными (неотрицательными) членами

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geqslant 0$. Заметим что последовательность его частичных сумм $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является неубывающей. Тогда верна следующая теорема

Теорема. *Для сходимости ряда с неотрицательными (положительными) членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм была ограничена.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами не убывает. Поэтому, если эта последовательность ограничена, то она сходится по теореме Вейерштрасса. Обратно, если эта последовательность сходится, то она ограничена. □

Замечание. (i) Сумма сходящегося ряда с положительными членами совпадает с точной верхней гранью частичных сумм.

(ii) Для ряда с неотрицательными (положительными) членами верна дихотомия: либо он сходится, либо он расходится к $+\infty$.

Признаки сходимости рядов

Теорема (признак сравнения). *Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, a_n, b_n \geqslant 0$. Пусть при некотором $C > 0$ для всех n справедливо неравенство $a_n \leqslant Cb_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Доказательство. Пусть S_n — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\tilde{S}_n$ — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Имеем $0 \leqslant S_n \leqslant C\tilde{S}_n$ для всех n. Тогда если последовательность $(\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то сходится и последовательность $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Наоборот, если последовательность $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ расходится, то расходится и последовательность $(\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Замечание. (i) Как всегда, в условиях теоремы достаточно чтобы неравенство $a_n \leqslant Cb_n$ выполнялось начиная с некоторого N.

(ii) В условиях теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется минорирующим рядом, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется мажорирующим рядом.

Теорема (предельный признак сравнения). *Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами и пусть существует конечный положительный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0.$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. В силу условия при достаточно больших n выполнены неравенства $\frac{1}{2}Cb_n \leqslant a_n \leqslant 2Cb_n$. □

Следующая теорема — весьма практичный метод исследования сходимости рядов с положительными членами.

Теорема (конденсационный признак Коши). *Пусть последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n > 0$ монотонна и убывает к нулю. Тогда ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Запишем неравенства

$$\begin{gathered}
a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \\
2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2, \\
4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4, \\
8a_{16} \leqslant a_9 + a_{10} + \ldots + a_{15} + a_{16} \leqslant 8a_8, \\
\ldots \\
2^{n-1}a_{2^n} \leqslant a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n} \leqslant 2^{n-1}a_{2^{n-1}}
\end{gathered}$$

и сложим их. Положим $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$, получим $\frac{1}{2}(\tilde{S}_n - a_1) \leqslant S_{2^n} - a_1 \leqslant \tilde{S}_n$.Осталось воспользоваться признаком сравнения. □

Применяя эту замечательную теорему можно доказать, что

(i) Гармонический ряд расходится: он удовлетворяет условию конденсационного признака Коши и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

что является расходящимся рядом.

(ii) $p-$ряд расходится $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p \leqslant 0$ (признак расходимости, последовательность не инфинитезимальна). При $p > 0$ ряд удовлетворяет условию конденсационного признака Коши и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{pn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)n}},$$

получили геометрический ряд; он сходится при $p > 1$.

(iii) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ удовлетворяет условию конденсационного признака Коши (почему?) и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

т.е. он расходится.

Рассмотрим два следующих важных признака

Теорема (признак Даламбера). *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с* $a_n > 0$. *Обозначим* $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Тогда*

(i) если $q > 1$, *то ряд расходится;*

(ii) если $q < 1$, *то ряд сходится.*

Теорема (радикальный признак Коши). *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с* $a_n \geqslant 0$. *Обозначим* $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Тогда*

(i) если $q > 1$, *то ряд расходится;*

(ii) если $q < 1$, *то ряд сходится.*

Замечание. В обоих признаках в случае $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым (например рассмотрите $p-$ ряд при произвольном p).

Доказательство. Доказательство расходимости: если $q > 1$, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

1) для признака Даламбера: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, $\forall n > N$ (т.е. $a_n > a_N$);

2) для радикального Коши: $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$, $\forall n > N$.

В обоих случая последовательность $(a_n)_n$ не инфинитезимальна. Значит, ряд расходится.

Доказательство сходимости: если $q < 1$, то выберем $r \in (q, 1)$. Тогда
1) для признака Даламбера: найдём N такое, что $a_{n+1} < ra_n, \ \forall n \geqslant N$, тогда

$$a_{N+k} < ra_{N+k-1} < r^2 a_{N+k-2} < \ldots < r^k a_N, \ \forall k \in \mathbb{N};$$

2) для радикального Коши: найдём N такое, что $a_n < r^n, \ \forall n \geqslant N$.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Знакопеременные ряды

В заключении рассмотрим следующий сходимости знакопеременного ряда специального вида

Теорема (признак Лейбница). *Пусть дан знакопеременный ряд вида* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, *где* $b_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $b_{n+1} \leqslant b_n$. *Тогда этот ряд сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность чётных частичных сумм $(S_{2n})_n$. Она не убывает

$$S_{2n} = S_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geqslant S_{2n-2}.$$

Рассмотрим последовательность чётных частичных сумм $(S_{2n})_n$. Она не возрастает

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}.$$

Таким образом

$$S_2 \leqslant S_4 \leqslant \ldots \leqslant S_{2n} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1} \leqslant \ldots \leqslant S_3 \leqslant S_1.$$

Следовательно, обе последовательности сходятся. Более того, т.к. $S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$, то переходя к пределу получаем, что предел обеих последовательностей один и тот же. Тогда и вся последовательность $(S_n)_n$ (т.к. последовательность чётных сумм — это $\limsup$, а последовательность нечётных — $\liminf$). $\square$

Пример. Из признака Лейбница моментально получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится. Заметим, что его абсолютный ряд расходится, т.е. ряд сходится условно.

Лекция 10

Компактность

Вернёмся к обсуждению компактов. Напомним, что множество называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

Определение. *Множество E называется секвенциально компактным, если из любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к пределу, лежащему в E.*

Теорема. *(i) Множество $E \subset \mathbb{R}$ компактно, если и только если оно секвенциально компактно.*

(ii) Множество $E \subset \mathbb{R}$ компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено.

Проведём доказательство теоремы по следующей схеме.
1) Если множество ограничено и замкнуто, то оно секвенциально компактно.
2) Если множество ограничено и замкнуто, то оно компактно.
3) Если множество не ограничено, то оно не компактно и не секвенциально компактно.
4) Если множество не замкнуто, то оно не компактно и не секвенциально компактно.

Доказательство. 1) Из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, она принадлежит множеству, так как множество замкнуто, то и предел принадлежит множеству.

2) Ранее мы доказали, что отрезок компактен (лемма Гейне–Бореля). Доказательство в основном опиралось на вложенные отрезки. Для любого замкнутого ограниченного множества проходит похожая конструкция, но мы пойдем другим путём. Пусть есть ограниченное и замкнутое множество E и его открытое покрытие $\cup_\alpha U_\alpha$. Множество E принадлежит некоторому отрезку $[a, b]$. Множество $(a-1, b+1) \setminus E$ открыто. Рассмотрим покрытие отрезка $[a, b]$, состоящее из всех множеств U_α и множества $(a-1, b+1) \setminus E$. Каждая точка отрезка покрывается, точки из E покрываются множествами из U_α, точки не из E — точками из $(a-1, b+1) \setminus E$. Теперь выберем по лемме Гейне—Бореля из покрытия $\cup_\alpha U_\alpha \cup (a-1, b+1) \setminus E$ отрезка $[a, b]$ конечное подпокрытие. Оно состоит из конечного числа множеств U_α: $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}\}$ и множества $(a-1, b+1) \setminus E$, которое, заметим, с E не пересекается. Поэтому $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}\}$ — конечное покрытие E.

3) Пусть множество E неограничено например сверху. Тогда есть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E, x_n \to +\infty$. Без потери общности можно считать последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонной. Из этой последовательности нельзя извлечь сходящуюся. Поэтому, E не секвенциально компактно. Рассмотрим счётную систему интервалов $U_n = (-n, n)$. По лемме Архимеда это есть открытое покрытие $\mathbb{R}$, следовательно, любого подмножества $E \subset \mathbb{R}$. Если E не ограничено, то из этого покрытия нельзя извлечь конечное подпокрытие: объединение конечной системы ограниченных множеств —- ограниченное множество.

4) Пусть множество E ограничено, но не замкнуто. Это значит, что у него есть предельная точка x^*, которая не принадлежит множеству E. По определению предельной точки выберем последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, сходящуюся к x^*. Любая её подпоследовательность сходится к той же точке $x^* \notin E$. Поэтому множество E не секвенциально компактно. Теперь построим открытое покрытие E, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Его легко выписать в явном виде, например, в него можно включить все лучи вида $(-\infty, x^* - 1/n)$ и все лучи $(x^* + 1/n, +\infty)$. Это покрытие множества $\mathbb{R} \setminus \{x^*\}$, следовательно, покрытие E. Любая конечная система множеств из такого покрытия не содержит некоторую окрестность точки

x^*, но по определению предельной точки в ней обязательно есть точки множества E, то есть эта конечная система не является покрытием. $\square$

Предел функции

Определение. *Проколотая окрестность, определение. Проколотая окрестность точки a — это окрестность точки a без самой точки a.*

Обозначение. $\overset{\circ}{U}(a)$

Пример. Множество $\{x : |x| \in (0, \delta)\}$ — проколотая окрестность точки 0 при любом $\delta > 0$, т.е. проколотая $\delta-$окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ нуля.

Определение 1 (Коши). *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $a \in E'$ — предельная точка множества E, причём E содержит какую-то проколотую окрестность $U(a)$ точки a. Пусть функция f определена на E. Говорят, что функция f стремится к A при x, стремящемся к a, если и только если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E \; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Часто последняя запись записывается в более явном виде (расписывая определение $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta \; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение. $\lim_{x\to a} f(x) = A, f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определение 2 (переформулировка). $A = \lim_{x\to a} f(x)$, *если для любой окрестности $U(A)$ точки A найдётся проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a такая, что $f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset U(A)$.*

Свойства переделов функции

Определение предела функции по Гейне. *Число A является пределом функции f при $x \to a$, если для любой последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a, x_n \neq a$ справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

В следующий раз мы покажем, что определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны. Из этой эквивалентности моментально следуют такие свойства:

Утверждение 1. *Если у функции f существует предел A при $x \to a$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a. Если $A \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется оценка $|f(x)| > |A|/2$.*

Утверждение 2. *Пусть существуют пределы $A = \lim_{x\to a} f(x)$ и $B = \lim_{x\to a} g(x)$. Тогда существует предел $\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x))$ и он равен $\alpha A + \beta B$.*

Утверждение 3. *Пусть существуют пределы $A = \lim_{x\to a} f(x)$ и $B = \lim_{x\to a} g(x)$ Тогда существует предел $\lim_{n\to a} f(x)g(x)$ и он равен AB. Если $B \neq 0$, то существует предел $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ и он равен A/B.*

Доказательство. Докажем утверждение 2. Утверждение 3 доказывается аналогично и остаётся в качестве упражнения (для случая предела частного нужно использовать Утверждение 1).

В самом деле, если существуют пределы $A = \lim_{x\to a} f(x)$ и $B = \lim_{x\to a} g(x)$, то при любой последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a, x_n \neq a$ справедливы равенства $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Тогда по теоремам о пределах последовательностей $\lim_{n\to\infty}(\alpha f(x_n) + \beta g(x_n)) = \alpha A + \beta B$, поэтому $\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$. $\square$

Утверждение 4 (предельный переход в неравенствах). *Пусть существуют пределы* $A = \lim_{x\to a} f(x)$ *и* $B = \lim_{x\to a} g(x)$. *Если* $f(x) \geqslant g(x)$ *для всех* x *из некоторой проколотой окрестности точки* a, *то* $A \geqslant B$. *Если* $f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x)$ *для всех* x *из некоторой проколотой окрестности точки* a *и* $A = B$, *то существует предел* $A = \lim_{x\to a} h(x)$.

Доказательство.Берем произвольную последовательность $(x_n)_n$, по Гейне существуют пределы последовательностей $A = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ и $B = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$, по условию $f(x_n) \geqslant g(x_n)$, поэтому $A \geqslant B$. Доказательство теоремы о двух милиционерах проводим аналогично, переходя к пределам последовательностей. $\square$

Лекция 11

Предел функции по Гейне

Следующие теоремы показывают, что определение предела функции по Коши и по Гейне совпадают.

Теорема 1 (необходимое условие). *Если $A = \lim_{x\to a} f(x)$, то для любой последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a, x_n \neq a$ справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Теорема 2 (достаточное условие). *Пусть для любой (строго монотонной последовательности) $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a$ справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Тогда $A = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Доказательство. 1) Пусть $A = \lim_{x\to a} f(x), x_n \to a, x_n \neq a$. Покажем,что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим по нему такое $\delta > 0$, что из $0 < |x-a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь, в силу $x_n \to a$ по числу δ выберем такое N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta$. Отсюда и по построению числа δ следует, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

2) Пусть для любой строго монотонной последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a$ справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что тогда $A = \lim_{x\to a} f(x)$. Рассуждать будем от противного. Построим отрицание к

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in E, 0 < |x-a| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для этого поменяем местами кванторы и перевернём заключительное неравенство:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0 :\ \exists x \in E, 0 < |x-a| < \delta\ |f(x) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Итак, пусть такое ε существует. В качестве произвольного δ будем выбирать числа $\delta_n = n^{-1}$, каждому такому δ_n соответствует $x_n \neq a$ такой, что $|x_n - a| < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Очевидно, что $x_n \to a$ (почему?). Осталось воспользоваться леммой о том, что из любой последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a, x_n \neq a$ можно выбрать строго монотонную подпоследовательность $(x_{n_k})_k$. Эта строго монотонная подпоследовательность также стремится к a, однако $f(x_{n_k})$ не стремится к A по построению: $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$. $\square$

Частичные пределы

Пусть последовательность $(x_n)_n, x_n \to a$ такова, что последовательность $(f(x_n)_n$ также сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ называется *частичным пределом функции f при $x \to a$.*

Если есть две различные последовательности $(x_n)_n, (y_n)_n$ такие, что $x_n, y_n \to a$, то существуют и различные пределы $\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n$, и, в силу эквивалентности пределов по Коши и по Гейне, предел $\lim_{x\to a} f(x)$ не может существовать.

Теорема (критерий Коши). *Предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует, если и только если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует $\lim_{x\to a} f(x)$. Тогда, по определению Коши,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in E, 0 < |x-a| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, построим по нему $\delta > 0$. Теперь

$$\forall x, y \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)\ |f(x) - a| < \varepsilon/2, |f(y) - a| < \varepsilon/2,$$

из чего следует, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнен критерий Коши. Из него вытекает, что для каждой последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a$ последовательность образов $(f(x_n))_n$ фундаментальна (почему?). Поэтому для каждой $(x_n)_n$ такой, что $x_n \to a$ последовательность $f(x_n)$ сходится. Осталось увидеть, что для двух последовательностей $(x_n)_n, (y_n)_n$ таких, что $x_n, y_n \to a$ пределы последовательностей $(f(x_n))_n$ и $(f(y_n))_n$ совпадают. Для этого рассмотрим последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$, эта последовательность также сходится к a, поэтому последовательность образов $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$ также фундаментальна, следовательно, сходится. □

Предел функции при $x \to \pm\infty$

Как и следует ожидать, определения предел функции при $x \to \infty$ таковы:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \forall x > N\ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall C > 0\ \exists N > 0 : \forall x > N\ f(x) > C.$$

Аналогично определения предела функции при $x \to -\infty$ таковы

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N < 0 : \forall x < N\ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall C < 0\ \exists N < 0 : \forall x > N\ f(x) < C.$$

Из определений видно, что из существования предела $\lim_{x\to\infty} f(x)$ следует существование предела $\lim_{n\to\infty} f(n)$. Обратное не верно. Пример: $f(x) = \sin(\pi x)$. В этом случае $f(n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому предел $\lim_{n\to\infty} f(n)$ существует и равен нулю. В то же время, $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$ не существует.

Упражнение. Докажите, что $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$ не существует.

Замечательные пределы

Их два. **Первый замечательный предел**: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. **Второй замечательный предел**: $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Доказательство первого замечательного предела: Докажем сначала, что

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

при $0 < |x| < \pi/2$. Рассмотрим случай $x \in (0, \pi/2)$. Случай $x \in (-\pi/2, 0)$ рассматривается аналогично. Рассмотрим рис.1. Даны: тригонометрический круг, с центром в начале координат, луч OL, проведённый под углом $x \in (0, \pi/2)$ к положительному лучу оси абсцисс, тока K — точка пересечения окружности и луча OL, перпендикуляры к оси абсцисс проходят через K и точку с координатами $(1, 0)$.

Теперь $S_{\Delta OAK} < S < S_{\Delta OHL}$, где S — площадь сектора OAK. Выразим эти площади через x: $|OA| = |OK| = 1, KH = \sin x, AL = \operatorname{tg} x$, тогда $S_{\Delta OAK} = \frac{1}{2}\sin x, S = \frac{1}{2}x, S_{\Delta OHL} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Итак, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, откуда

$$\cos^2 x < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Теперь из $\frac{\sin x}{x} < 1$ следует, что $0 < \sin x < x$. Тогда по теореме о двух милиционерах получаем, что $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Покажем, что $\lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1$. Действительно, $\lim_{x\to 0} \cos^2 x = \lim_{x\to 0}(1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x\to 0} \sin^2 x = 1$. Тогда по теореме о двух милиционерах неравенство $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$ влечёт, что $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

Следствие. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

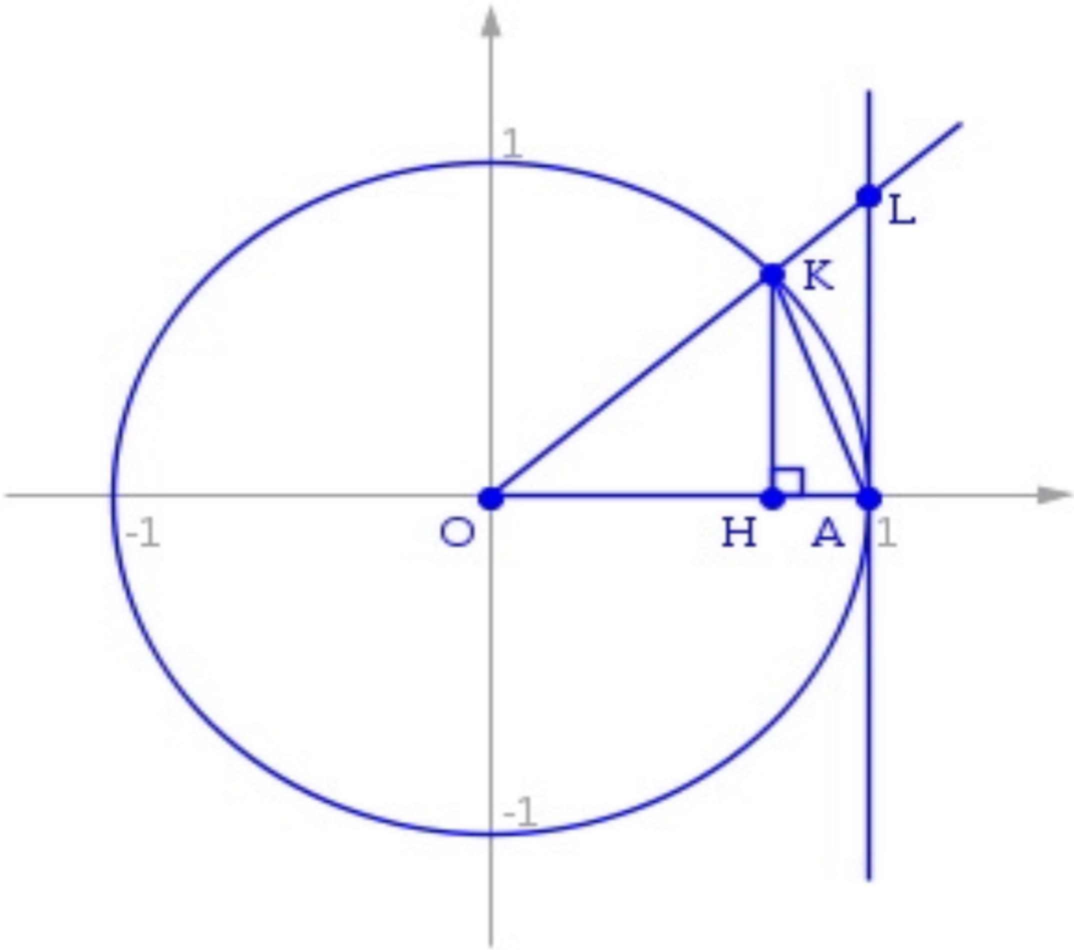


Рис. 1. К первому замечательному пределу

Доказательство второго замечательного предела: На семинарах мы доказали, что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Пусть теперь x — вещественное число, а не натуральное, обозначим через $n=[x]$ его целую часть. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n}.$$

Легко видеть, что

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} \to e, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n} \to e, \text{ при } n\to\infty.$$

Значит, для любого $\varepsilon>0$ найдётся $N\in\mathbb{N}$, такое что при $n>N$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - e\right| < \varepsilon, \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n} - e\right| < \varepsilon,$$

откуда получаем

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$$

при $x > N$. $\Box$.

Упражнение. Почему в доказательстве второго замечательного предела мы не воспользовались теоремой о двух милиционерах?

Предел сложной функции. Замена переменных в пределах

Пусть даны две функции, f и g, причём их области определения и множества значений так согласованы, что определена функция $g(f(x))$. Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки a и пусть существует предел $\lim_{x\to a} f(x) = A$, причём $f(x) \neq A$. Пусть функция g определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(A)$ точки A и существует предел $\lim_{y\to A} g(y) = B$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(f(x))$ и существует предел $\lim_{x\to a} g(f(x)) = B$, иными словами, если в формуле

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to A} g(y) = B$$

второй предел существует, то существует и первый, и он равен второму. **Докажем это:** дано:

$$\forall\varepsilon_0 > 0\ \exists\delta_0 > 0 : \forall x, 0 < |x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_0,$$
$$\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists\delta_1 > 0 : \forall x, 0 < |y-A| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - B| < \varepsilon_1.$$

Доказать:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x, 0 < |x-a| < \delta_0 \Rightarrow |g(f(x)) - B| < \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и построим по ε_1 величину δ_1 так, чтобы $\forall y : 0 < |y-A| < \delta_1 \Rightarrow |g(y)-B| < \varepsilon_1$. Теперь положим $\varepsilon_0 = \delta_1$ и построим по этому ε_0 величину δ_0. Покажем, что требуемая формула выполняется при $\delta = \delta_0$. По построению при $0 < |x-a| < \delta$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon_0 = \delta_1$, при $|f(x) - A| < \delta_1$ выполнено $|g(f(x)) - B| < \varepsilon$. $\Box$

Эту формулу удобно применять к вычислению пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = [y = 4x] = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y/4} = 4,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = [y = x^2] = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = [y=-x] = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y =$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} = [u = y-1] = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e.$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = [x = 1/t] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Лекция 12

$O-$большое и $o-$малое

Часто на практике и для наших дальнейших целей будет удобны понятия $o-$малого и $O-$большого.

Определение: *Функция α называется бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to a$, если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, на которой $\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x)$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, причём $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. При этом пишут, что $\alpha(x) = o(f(x))$ при $x \to a$.*

Определение: *Функция f называется ограниченной относительно функции g при $x \to a$, если функции f, g определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a и существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a)$. При этом пишут, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.*

Относительно последнего определения: эквивалентно можно сказать, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если существует такая ограниченная в $\overset{\circ}{U}(a)$ функция h, что $f(x) = h(x)g(x)$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$.

Примеры: 1) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$;
2) $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$;
3) $\ln x = o(x)$ при $x \to +\infty$;
4) $(x+1)^2 = O(x^2)$ при $x \to +\infty$;
5) $o(x) = O(x)$ при $x \to 0$ однако $O(x) \neq o(x)$ при $x \to 0$.

Также полезным оказывается понятие *асимптотически равных или эквивалентных* функций.

Определение: *Функции f и g называются эквивалентными или асимптотически равными при $x \to a$, если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, на которой $f(x) = \lambda(x)g(x)$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, причём $\lim_{x\to a}\lambda(x) = 1$. При этом пишут, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.*

Примеры: $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$ как следствие из первого замечательного предела

Несложно показать, что асимптотическое равенство или эквивалентность является отношением эквивалентности на функциях (при условии что $x \to a$ для всех функций).

Упражнение: проверьте это.

Односторонние пределы

Важную роль играют так называемые односторонние пределы функций. Неформально говоря, это пределы, в которых $x \to a$ «с одной стороны», либо справа, либо слева от точки a. Соответственно, бывают два односторонних предела: левый (левосторонний, предел слева) и правый (правосторонний, предел справа).

Левый предел обозначается $\lim_{x\to a-0} f(x)$, правый – $\lim_{x\to a+0} f(x)$.

Определение. *Число A называется левым пределом пределом f при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in (a-\delta, a)\ |f(x) - A| < \varepsilon$. Число A называется правым пределом пределом f при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in (a, a+\delta)\ |f(x) - A| < \varepsilon$.*

Замечание: Если существуют оба односторонних предела и они равны $A \in \mathbb{R}$, то существует и обычный предел $\lim_{x\to a} f(x)$ и он также равен A. Обратное так же верно. Это замечание часто оформляют в виду теоремы: *конечный предел A функции f в точке a существует тогда и только тогда, когда существуют конечные левые и правые пределы в a, равные A.*

Определения односторонних пределов могут также быть переформулированы в терминах Гейне. Ограничимся формулировками для левого предела.

Пусть функция f определена на интервале $(a-h, a)$.

Теорема о левом пределе по Гейне. *Если $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$, то для любой последовательности $(x_n)_n \subset (a-h, a), x_n \to a$, справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Пусть для любой строго возрастающей последовательности $(x_n)_n \subset (a-h, a), x_n \to a$ последовательность $(f(x_n))_n$ сходится. Тогда существует предел $\lim_{x\to a-0} f(x)$.*

Доказательство: Доказательство первой части теоремы опустим, ранее мы доказывали очень похожие утверждения.

Во второй части сначала заметим, что в условиях теоремы все последовательности $(f(x_n))_n$ сходятся к одному и тому же пределу A. Пусть есть две строго возрастающих последовательности $(x_n)_n, (y_n)_n, x_n, y_n \to a$. Построим по ним объединяющую строго возрастающую последовательность $(z_n)_n, z_n \to a$, последовательности $(x_n)_n, (y_n)_n$ — подпоследовательности $(z_n)_n$. Теперь по предположению $(f(z_n))_n$ сходится к некоторому числу A, следовательно обе подпоследовательности $(f(x_n))_n, (f(y_n))_n$ также сходятся к A. Дальнейшее доказательство можно провести от противного, аналогично доказательству теоремы об эквивалентности пределов по Гейне и по Коши $\square$

Из этой теоремы следует, например следующее важное утверждение.

Теорема об односторонних пределах монотонной функции. *Пусть на отрезке $[c, d]$ задана монотонно возрастающая функция f. Пусть $a \in (c, d)$. Тогда существуют пределы $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$ и $B = \lim_{x\to a+0} f(x)$.*

Доказательство: Для доказательства достаточно отметить, что для любой строго возрастающей последовательности $(x_n)_n, x_n \to a$ последовательность $(f(x_n))_n$ не убывает и ограничена сверху числом $f(a)$ и что для любой строго убывающей последовательности $(x_n)_n, x_n \to a$ последовательность $(f(x_n))_n$ не возрастает и ограничена числом $f(a)$ снизу. $\square$

Непрерывные функции

Определение. *Функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \Rightarrow f(x) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon (f(x_0)).$$

Иными словами, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ или ещё проще $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$. Используя эквивалентность определений по Гейне и по Коши, можно также сказать, что для любой последовательности $(x_n)_n$ сходящейся к x_0 справедливо, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Из теорем о пределах функции следуют «обычные» свойства непрерывных в некоторой точке x_0 функций: сумма и произведение в x_0 непрерывных функций — непрерывная в x_0 функция, частное непрерывных функций f/g тоже (если $g(x_0) \neq 0$).

Определение. *Функция называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Соответственно, сумма и произведение на E непрерывных функций — непрерывная на E функция, частное f/g непрерывных функций тоже (если $g(x_0) \neq 0$ при $x \in E$).

Следующая теорема содержит важное свойство непрерывных функций, которое часто принимают за определение непрерывной функции.

Теорема. *Функция f непрерывна на интервале, если прообраз любого открытого множества открыт.*

Односторонняя непрерывность

Пусть функция f определена на множестве $[x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$. Будем говорить, что f непрерывна справа в точке x_0, если существует односторонний предел f при $x \to x_0+0$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично, если функция f определена на множестве $(x_0-\delta, x_0], \delta > 0$, то f непрерывна слева в точке x_0, если существует односторонний предел f при $x \to x_0-0$ и $\lim_{x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Локальные свойства непрерывных функций

Теорема. *Пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда функция f ограничена в некоторой окрестности точки x_0, а если $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 функция f ненулевая и более того $|f| > |f(x_0)|/2 > 0$, и её знак совпадает со знаком $f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке x_0. Тогда (по определению непрерывности) для $\varepsilon = 1$ существует такое $\delta > 0$, что при $|x-x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant |f(x_0)|+1$. Ограниченность непрерывной функции доказана. Пусть $f(x_0) \neq 0$, например, $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$, по определению непрерывности существует такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) > \varepsilon$ □

Теорема. *Пусть функции $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда функции $\alpha f + \beta g, fg$ и (если, дополнительно, $g(x_0) \neq 0$)f/g непрерывны в x_0.*

Доказательство. Все утверждения непосредственно следуют из соответствующих теорем о пределах □

Теорема о сложной функции. *Пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$, а функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$ и непрерывна в этой точке. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Непрерывность g в точке $f(x_0)$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0 : \forall y \in (f(x_0) - \eta, f(x_0) + \eta) \Rightarrow |g(f(x_0)) - g(y)| < \varepsilon.$$

Непрерывность f в точке x_0:

$$\forall\eta > 0\ \exists\delta > 0 : \forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \eta.$$

Покажем, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < |g(f(x_0)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, строим η, по η строим δ. Теперь $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеем $|f(x_0) - y| < \eta$ $(y = f(x))$ и, следовательно, $|g(f(x_0)) - g(f(x))| < \varepsilon$. □

Лекция 13

Непрерывные функции на отрезке

Определение. *Будем говорить, что функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, если* f *непрерывна на интервале* (a,b)*, непрерывна слева в точке* b *и непрерывна справа в точке* a*.*

Всюду через $C([a,b])$ или $C^0([a,b])$ обозначается множество непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, это множество является векторным пространством.

Теорема о промежуточном значении (Больцано–Коши). *Пусть* $f \in C([a,b])$*, причём* $f(a)f(b) < 0$*. Тогда существует такое* $\theta \in (a,b)$*, что* $f(\theta) = 0$*.*

Доказательство. Рассмотрим случай $f(a) < 0, f(b) > 0$. Определим множество $E = \{y \mid \forall x \in (y,b) : f(y) > 0\}$. Это множество не пусто: из $f(b) > 0$ следует, что $f(x) > 0$ в окрестности точки b. Это множество ограничено снизу: a — нижняя граница этого множества. Значит, у этого множества есть точная нижняя грань $\theta = \inf E$. Покажем, что $f(\theta) = 0$. Если это не так, то либо $f(\theta) > 0$, либо $f(\theta) < 0$.

Если $f(\theta) > 0$, то $f > 0$ в окрестности $U_\delta(\theta)$, таким образом $\theta - \delta/2 \in E$, это противоречит тому, что θ — нижняя грань E.

Если $f(\theta) < 0$, то $f < 0$ в окрестности $U_\delta(\theta)$, таким образом $\theta + \delta/2 \notin E$, это противоречит тому, что θ — точная нижняя грань для E. $\square$

Следствие. *Пусть* $f \in C([a,b])$*, причём* $f(a) < f(b)$*. Тогда для любого* $A \in (f(a), f(b))$*, найдётся такое* $\theta \in (a,b)$*, что* $f(\theta) = A$*.*

Доказательство. Для доказательства следствия достаточно рассмотреть функцию $f(x) - A$, для неё выполнены все условия теоремы Больцано–Коши. $\square$

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении. *Пусть* $f \in C([a,b])$*. Тогда* f *ограничена сверху и снизу, причём найдутся такие точки* x_1 *и* x_2 *на* $[a,b]$*, что* $f(x_1) = \min f(x), f(x_2) = \max f(x)$*.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть функция f не ограничена, это значит, что найдётся последовательность $(x_n)_n \subset [a,b]$, для которой $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$. Выберем из последовательности $(x_n)_n$ (она ограничена!) сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_k, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Теперь $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, а $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty \neq f(x_0)$, что противоречит непрерывности f на $[a,b]$. Итак, функция f ограничена и сверху, и снизу. Пусть $M = \sup f(x)$, но f не принимает значение M ни в какой точке. Тогда функция $\varphi(x) = 1/(M - f(x))$ определена при всех $x \in [a,b]$, по доказанным ранее теоремам, она непрерывна. Значит, эта функция ограничена сверху: $\varphi(x) < K$, отсюда $M - f(x) > 1/K$, или $f(x) \leqslant M - 1/K$, что противоречит $M = \sup f(x)$. Аналогичная конструкция показывает, что достигается точка минимума. $\square$

Теорема. *Образ отрезка при непрерывном отображении — отрезок или точка.*

Доказательство. Если $f = const$, то образ — единственная точка. Пусть $f \neq const$. Тогда образ $[a,b]$ не просто отрезок — это отрезок $\Delta = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$. Действительно, мы показали, что значения $\min_{[a,b]} f$ и $\max_{[a,b]} f$ достигаются. Более того, то, что любые значения из Δ достигаются, следует из теоремы о промежуточном значении. Наконец, очевидно, что значения вне Δ не принадлежат образу (поскольку эти значения находятся вне $\min_{[a,b]} f$ и $\max_{[a,b]} f$). $\square$

Равномерная непрерывность

Оказывается непрерывность бывает разной. Выделяют понятие *равномерной непрерывности.*

Определение. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве E, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Это определение похоже на определение непрерывности в точке. При определении непрерывности в точке x_0 число δ определялось по ε и x_0. При определении равномерной непрерывности на множестве число δ определяется по ε и множеству E. При этом, δ одно общее для всего множества. Естественно, непрерывность во всех точках $x_0 \in E$ функция f , означает, что в каждой точке есть своё число δ. Равномерная непрерывность же означает, что для каждого ε есть единственное δ, общее для всех точек из E.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^2$ является равномерно непрерывной на $[0, 1]$ (на самом деле на любом отрезке $[a, b]$).

2) Та же самая функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой $(-\infty + \infty)$: всегда можно выбрать значение $\varepsilon > 0$ для любого отрезка сколь угодно малой длины ε/x — такое, что разница значений функции $f(x) = x^2$ на концах отрезка будет больше ε; в частности, на отрезке $[x, x + \frac{\varepsilon}{x}]$ разница значений функции стремится к 2ε.

3) Функция $g(x) = 1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$: так как для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ можно указать такой отрезок значений аргумента x, что на его концах значения функции будут различаться больше, чем на ε; связано это с тем, что наклон графика функции в районе нуля неограниченно растёт.

Из определения сразу следует, что функция, равномерно непрерывная на множестве E, непрерывна на нём. Оказывается, обратное верно, если E — компакт.

Теорема Кантора. *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция равномерно непрерывна на нём.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда

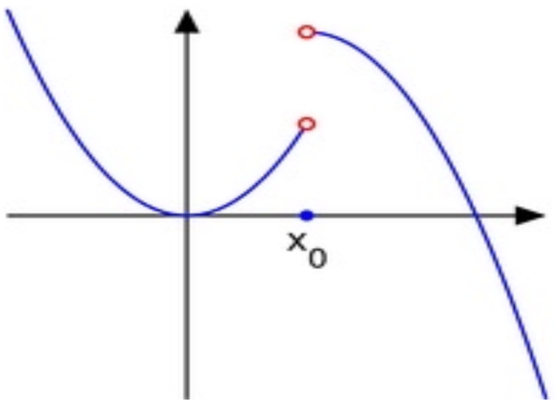
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists x, y \in E : \ |x - y| < \delta, \text{ но } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

То есть для каждого $\delta = \delta_n = 1/n$ найдутся такие x_n, y_n, $|x_n - y_n| < \delta_n$, что $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. Выберем из ограниченной последовательности чисел $(x_n)_n$ сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_k : x_{n_k} \to x^* \in [a, b]$ (почему так можно сделать?). Так как $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$, то и $y_{n_k} \to x^*$. Функция f непрерывна в точке x^*, поэтому $f(y_{n_k}) \to f(x^*)$ и $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$. Для всех k по построению справедливо неравенство $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$, перейдем в нём к пределу $k \to \infty$, получим противоречие: $0 \geqslant \varepsilon > 0$. $\square$

Разрывы, классификация точек разрыва

Непрерывные функции не имеют разрывов. Если функция не непрерывна, тогда мы будем интересоваться какого типа разрывы у неё могут быть. Одни разрывы в некотором смысле лучше, другие хуже.

Определение. *Если существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и они равны между собой (но не равны $f(x_0)$), то x_0 называется устранимой точкой разрыва. Если существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и они не равны между собой, то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. Если не существует (или бесконечен) хотя бы один односторонний предел $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва 2-го рода.*



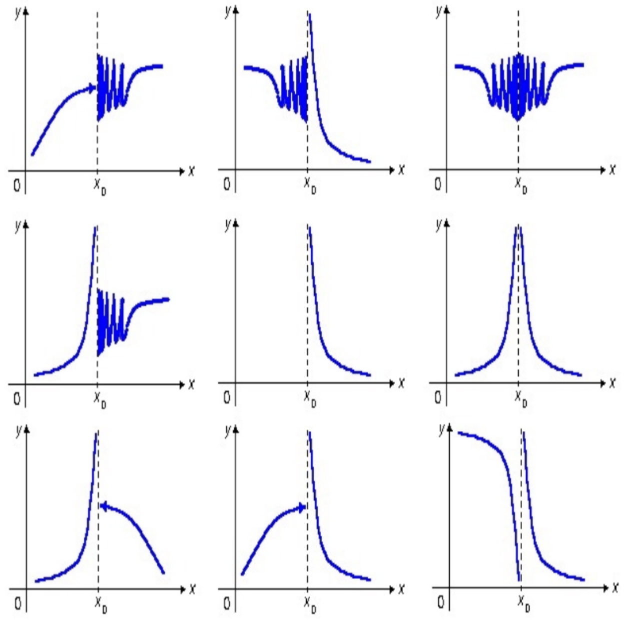


Рис. 2. На левой картинке показан разрыв 1-го рода, на правой картинке — почти все возможные варианты разрыва 2-го рода

Примеры. 1) Функция *знак* определена как:

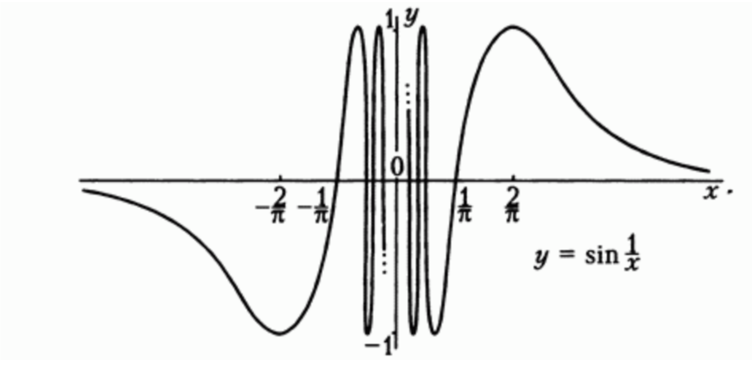
$$sgn(x) = \begin{cases} 0, \ x = 0, \\ 1, \ x > 0, \\ -1, \ x < 0. \end{cases}$$

У неё есть единственный разрыв в точке 0, являющийся разрывом 1-го рода.

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке 0. В этой точке у неё разрыв 2-го рода.



1) *Функция Дирихле* определена следующим образом:

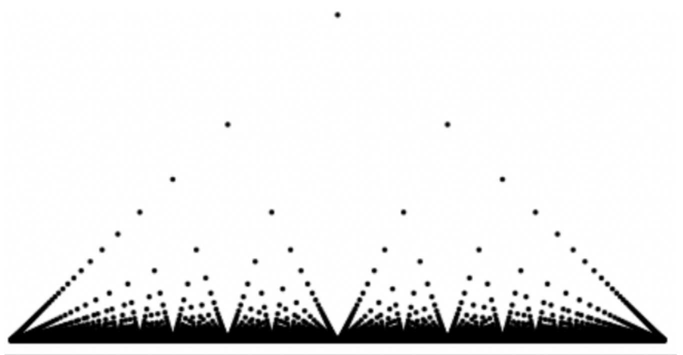
$$D(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

У функции Дирихле в каждой точке разрыв 2-го рода.

2) Родственницей функции Дирихле является *функция Римана*:

$$R(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0, \\ 1/q, \ x = p/q, (p, q) = 1, \\ 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция Римана разрывна в рациональных точках (все они являются разрывами 1-го рода) и непрерывна в иррациональных.



Элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий и композиций функций. Основными элементарными функциями называются функции $f(x) = const, f(x) = x, f(x) = a^x$ и $f(x) = \ln x$, степенная функция x^α, все тригонометрические функции и обратные к ним. Таким образом, основная элементарная функция — это кирпичик, из которого мы строим более сложные элементарные функции с помощью обычных операций. На семинарах мы корректно определим функции $a^x, \ln x$ и x^α и докажем, что они непрерывны в своих областях определения. Для тригонометрическич функций и обратных к ним мы не будем этого доказывать.

С помощью основной элементарной функции определяются *гиперболические функции*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

эти функции называются соответсвенно *гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом, гиперболическим тангенсом и гиперболическим котангенсом.* Также по аналогии с тригонометрическими функциями определяются *гиперболический секанс и гиперболический косеканс*:

$$sch \ x = 1/\operatorname{ch} x, \quad csch \ x = 1/\operatorname{sh} x.$$

Аналогия с тригонометрическими функциями заключается в том, что для гиперболических функций выполняются например такие тождества

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{ch}^2(x/2) = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2(x/2) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}.$$

Также верны формулы двойного, тройного, кратного "угла суммы и разности синусов, косинусов и тангенсов. Все эти формулы легко выводятся из определений. Также легко видеть, что гиперболические синус и тангенс — нечётные функции, гиперболические косинус и котангенс — чётные. Более подробную информацию можно например прочитать на Википедии.

Лекция 14

Производные

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0.

Определение производной 1. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A,$$

то функция f называется дифференцируемой в точке x_0, число A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение производной 2. *Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если при некотором A для её значений в точках x_0+h при $h\to 0$ справедливо представление $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h)$, число A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x0)$.*

Оба определения эквивалентны, это просто различная формулировка одной и той же формулы:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}=A\Leftrightarrow f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h).$$

Утверждение. *Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Следует из определения 2: если $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h)$, при $h\to 0$, то $\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$. $\square$

Определение. *Линейная функция $h\mapsto f'(x_0)h$ называется дифференциалом функции f в точке x_0.*

Обозначения. $df(x), d_xf, Df(x), D_xf$.

Часто говорят, что дифференциал — *главная линейная часть приращения дифференцируемой функции.* В самом деле, *приращение функции* $f(x_0+h)-f(x_0)$ имеет вид суммы значения дифференциала Ah и малых более высокого порядка $o(h)$.

Замечание 1. Можно задать вопрос: раз дифференциал — линейное отображение, то из какого векторного пространства в какое он бьёт? Дифференциал — это линейная функция, для вещественных функций линейная функция — это умножения на число. Это функция определённая на приращениях h к x_0 и принимающая значения в множестве приращений к значениям функции. То есть, дифференциал, как и всякое линейное отображение, должен переводить начало координат в начало координат. Иными словами, если параллельно переместить начало координат на плоскости в точку $(x_0,f(x_0))$, то в новых координатах дифференциал будет настоящей линейной функцией. При этом у нас были переменные x и y, появились новые переменные $x-x_0$ и $y-f(x_0)$. Была числовая прямая «иксов», стала числовая прямая приращений x. Была числовая прямая «игреков», стала числовая прямая приращений y. Эти сдвинутые числовые прямые называют «касательные пространства» и обозначают $T_{x_0}\mathbb{R}$ и $T_y\mathbb{R}$. Дифференциал — это линейная функция из $T_{x_0}\mathbb{R}$ в $T_y\mathbb{R}$). Эта терминология для функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ не обязательна и используется редко. Однако, когда мы в будущем дойдем до дифференцирования отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, вот там терминология станет уместной.

Замечание 2. Лейбниц использовал вместо обозначения $f'(x)$ для производной обозначение $\frac{df}{dx}$. Это обозначение очень удобно. Вообще-то, это единый символ: производная f в точке x.

Однако, это одновременно и дробь. И в некоторых формулах именно так её и удобно использовать, по крайней мере для запоминания. Мы будем использовать это обозначение иногда по-разному:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}.$$

Геометрический смысл производной. Касательная как предел секущих

Будем предполагать, что кривая задана графиком функции f. Секущей, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$, называется прямая, проходящая через эту точки и ещё точку $(x_0+h, f(x_0+h))$ графика функции.

Уравнение секущей:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{h}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)(x - x_0).$$

При $x = x_0$ имеем $y = f(y_0)$,при $x = x_0 + h$ имеем $y = f(x_0 + h)$,то есть это в самом деле секущая; при каждом $h \neq 0$ — своя секущая.

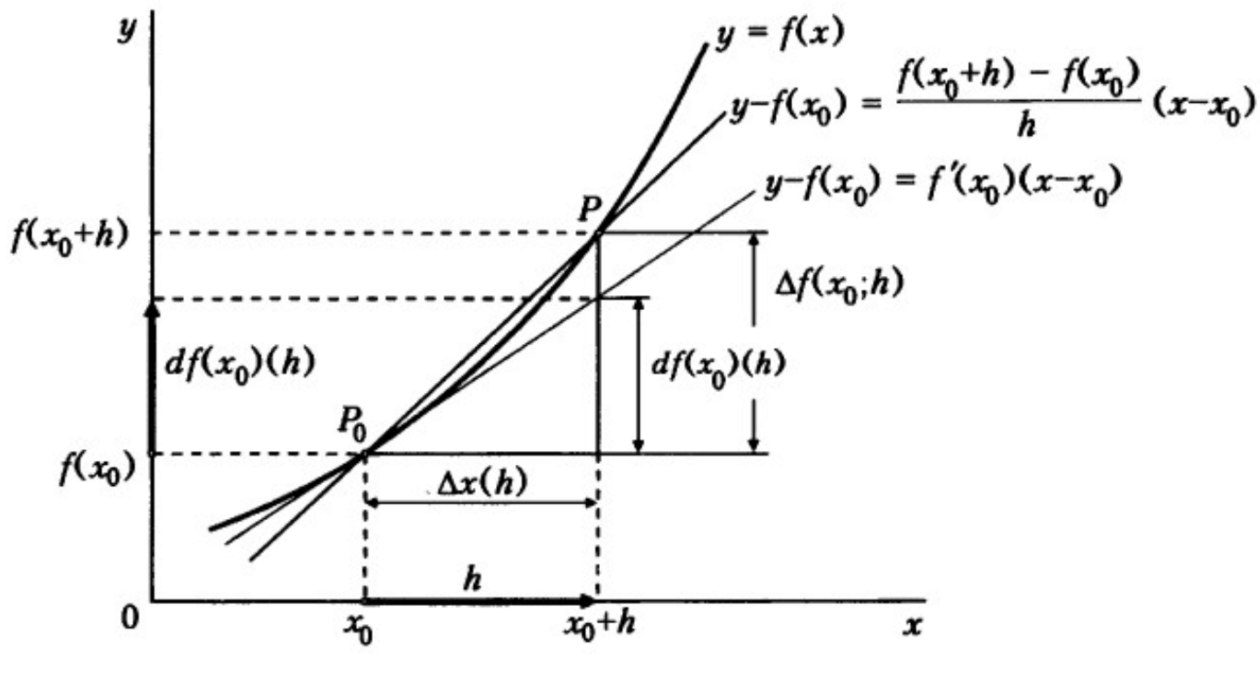


Рис. 3. Касательная и секущая.

Теперь устремим h к нулю. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то уравнение «предельной секущей» будет иметь вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Эта прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, тангенс угла её наклона равен производной, эта прямая называется касательной (или касательной к графику f в точке x_0).

Здесь есть одна тонкость: мы перешли к пределу в уравнении прямой. Что это значит формально — прямая стремится к прямой — не слишком понятно. Пересекающиеся в некоторой точке прямые, даже с очень близкими углами наклона, «на бесконечности» далеки друг от друга. Однако, пусть мы будем писать уравнение каждой прямой в виде $y - f(x_0) = k(x - x_0)$. При разных k это будут прямые, проходящие через точку $(x_0, f(x_0))$. Пусть число k зависит от параметра h. И пусть существует предел $k(h)$ при $h \to 0 : k(h) \to k(0)$. Тогда вполне естественно считать, что прямая $y - f(x_0) = k(0)(x - x_0)$ есть предельное положение прямых $y - f(x_0) = k(h)(x - x_0)$ при $h \to 0$. По такому определению у дифференцируемой функции касательная $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ есть предельное положение секущей: $y - f(x_0) = h^{-1}(f(x_0+h) - f(x_0))(x - x_0)$, при $h \to 0$. Секущая проходит через точки $(x_0, f(x_0)$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h)$.

Арифметические правила дифференцирования.

Теорема. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0, внутренней точке области определения функций.*

1. Линейная комбинация $\varphi = \alpha f + \beta g (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi' = \alpha f' + \beta g'$.

2. Произведение $f \cdot g$ дифференцируемо в точке x_0 и $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (правило Лейбница).

3. Пусть $g(x_0) \neq 0$, тогда частное f/g дифференцируемо в точке x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

В частности

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство.

$$1.\ \alpha f(x_0 + h) + \beta g(x_0 + h) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0) = \alpha(f(x_0 + h) - f(x_0)) + \beta(g(x_0 + h) - g(x_0)) =$$
$$= \alpha(f'(x_0)h + o(h)) + \beta(g'(x_0)h + o(h)) = (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))h + o(h).$$

$$2.\ f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) +$$
$$+ f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) = (f'(x_0)h + o(h)) \cdot (g(x_0) + o(1)) + f(x_0) \cdot (g'(x_0)h + o(h)) =$$
$$= (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))h + o(h).$$

$$3.\ \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)} =$$
$$= \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)} =$$
$$= \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0)(g(x_0) - g(x_0 + h))}{g(x_0 + h)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0)h - f(x_0)g'(x_0)h + o(h)}{g^2(x_0) + o(1)} =$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}h + o(h).\ \Box$$

Приведем некоторое количество примеров вычисления производных по определению.

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1};$$

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a;$$

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x + h/2)\sin(h/2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \lim_{h \to 0} \cos(x + h/2) = \cos x;$$

аналогично $(\cos x)' = -\sin x$;

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема о дифференцировании сложной функции. *Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0. Пусть функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$ и дифференцируема в точке $f(x_0)$. Тогда функция $g(f(x))$ определена в окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке и*

$$\frac{dg(f)}{dx}(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Пример. $(\sin x^2)' = (\sin)'(x^2)(x^2)' = (\cos x)2x = 2x\cos x$.

Следующее утверждение — это всего лишь «наведение порядка» в дифференциалах функций из предыдущей теоремы и касательных пространствах, в которых действуют эти дифференциалы.

Утверждение о дифференциале сложной функции. *Дифференциал композиции $g \circ f$ является композицией дифференциалов $dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.*

Дифференцируемость обратной функции

Пусть функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0. На семинарах мы показали, что в окрестности точки $f(x_0)$ определена непрерывная обратная функция f^{-1} со значениями в окрестности точки x_0.

Теорема о производной обратной функции. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x_0)$ и*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Имеем $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \neq 0$. Хотим показать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{f^{-1}(f(x_0)+t) - f^{-1}(f(x_0))}{t} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Перепишем искомое равенство в эквивалентном виде

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{f^{-1}(f(x_0)+t) - f^{-1}(f(x_0))} = f'(x_0).$$

Обозначим $u = f^{-1}(f(x_0)+t)$, тогда $f(u) = f(x_0)+t$ и $t = f(u) - f(x_0)$, очевидно, $u \to x_0$ при $t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{f^{-1}(f(x_0)+t) - f^{-1}(f(x_0))} = \lim_{u\to x_0} \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} = f'(x_0).$$

Замечание. В условиях теоремы дифференциал обратного отображения — обратное отображение к дифференциалу функции f. Дифференциал $df(x_0)$ действует из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$, дифференциал $df^{-1}(f(x_0))$ действует из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$. Геометрически теорема об производной обратной функции означает следующее. График обратной функции симметричен графику функции относительно биссектрисы $y = x$. Поэтому касательная в какой-то точке также симметрична соответствующей касательной. Соответственно, произведение тангенсов углов наклона симметричных касательных равно 1. Это и утверждает теорема.

Пример 1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$. Действительно, пусть $x = \sin y, y = \arcsin x$. Эти функции взаимно обратны, если $x \in [-1,1]$ и $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Теперь, если $\cos y \neq 0$ или, что тоже, $|x| \neq 1$, то

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знак перед корнем выбран с учётом того, что $\cos y > 0$ при $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Далее, так как $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ при $x \in (-1,1)$, то $(\arccos x)' + (\arcsin x)' = 0$.

Пример 2. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Действительно, пусть $x = \operatorname{tg} y, y = \operatorname{arctg} x$. Эти функции взаимно обратны, если $x \in (-\infty, \infty)$ и $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Теперь

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Таблица производных

Эта таблица содержит все основные формулы производных, зная которые можно вычислять производные других функций. По крайней мере некоторые из этих формул надо знать наизусть: 1-9, 11. Формулы 13-15 желательно помнить, как похожие на формулы 5-7. Формулы 17-20 приведены в ознакомительных целях.

	Функция f	Производная f'	О.Д.З.
1.	$const$	0	
2.	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ при $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $\alpha \in \mathbb{Q}$
3.	a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
4.	$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
5.	$\sin x$	$\cos x$	
6.	$\cos x$	$-\sin x$	
7.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
8.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k$
9.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
10.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
11.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
12.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
13.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
14.	$\operatorname{ch} x$	sh	
15.	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	
16.	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$x \neq 0$
17.	$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
18.	$\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\lvert x \rvert > 1$
19.	$\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
20.	$\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert > 1$

Рис. 4. Таблица производных.

Лекция 15

Теорема о дифференцировании сложной функции. *Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0. Пусть функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$ и дифференцируема в точке $f(x_0)$. Тогда функция $g(f(x))$ определена в окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке и*

$$\frac{dg(f)}{dx}(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Доказательство. По предположению $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h+o(h), g(f(x_0)+t)-g(f(x_0)) = g'(f(x_0))t+o(t)$ при малых $|h|, |t|$. Положим во второй формуле $t = f(x_0+h)-f(x_0)$. В силу первой формулы имеем $t = O(h)$, значит $o(t) = o(h)$. Поэтому

$$g(f(x_0)+h)-g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(f(x_0+h)-f(x_0))+o(h) = g'(f(x_0))(f'(x_0)h+o(h))+o(h) = \\ = g'(f(x_0))f'(x_0)h+o(h).$$

При этом дифференцируемая в точке x_0 функция f непрерывна в этой точке, поэтому при достаточно малом h величина $f(x_0+h)$ попадает в ту окрестность точки $f(x_0)$, в которой определена функция g. $\square$

Теорема о производной обратной функции. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x_0)$ и*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Имеем $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \neq 0$. Хотим показать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{f^{-1}(f(x_0)+t)-f^{-1}(f(x_0))}{t} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Перепишем искомое равенство в эквивалентном виде

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{f^{-1}(f(x_0)+t)-f^{-1}(f(x_0))} = f'(x_0).$$

Обозначим $u = f^{-1}(f(x_0)+t)$, тогда $f(u) = f(x_0)+t$ и $t = f(u)-f(x_0)$, очевидно, $u \to x_0$ при $t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{f^{-1}(f(x_0)+t)-f^{-1}(f(x_0))} = \lim_{u\to x_0} \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} = f'(x_0).$$

Замечание. В условиях теоремы дифференциал обратного отображения — обратное отображение к дифференциалу функции f. Дифференциал $df(x_0)$ действует из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$, дифференциал $df^{-1}(f(x_0))$ действует из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$. Геометрически теорема об производной обратной функции означает следующее. График обратной функции симметричен графику функции относительно биссектрисы $y = x$. Поэтому касательная в какой-то точке также симметрична соответствующей касательной. Соответственно, произведение тангенсов углов наклона симметричных касательных равно 1. Это и утверждает теорема.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Пусть на некотором интервале U задана непрерывная функция f.

Определение. *Внутренняя точка x_0 называется точкой локального минимума, если в некоторой окрестности $U(x_0) \subset U$ $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всякой точки $x \in U(x_0)$. Внутренняя точка x_0 называется точкой строгого локального минимума, если в некоторой проколотой* *окрестности* $\overset{\circ}{U}(x_0) \subset U$ $f(x_0) < f(x)$ *для всякой точки* $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. *Величина* $f(x_0)$ *называется локальным минимумом функции* f. *Аналогично определяется точка (строгого) локального максимума и локальный максимум функции* f. *Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума.*

Теорема Ферма. *Пусть в точке* x_0 *локального экстремума функция* f *дифференцируема. Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, x_0 — точка локального максимума. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad f'(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0,$$

поэтому $f'(x_0) = 0$. □

Замечание 1. Теорема Ферма справедлива исключительно для внутренних точек области определения.

Теорема Ферма утверждает, что равенство $f'(x_0) = 0$ является необходимым условием локального экстремума. Для того, чтобы найти максимум дифференцируемой функции можно сначала найти все нули производной. Если их окажется конечное количество, то переберем их по очереди и найдем ту, в которой достигается максимум. Если требуется найти максимум функции на отрезке, то надо не забыть, что он может достигаться в крайних точках отрезка. Поэтому к списку «подозрительных на максимум» точек, в которых $f' = 0$ надо добавить ещё границы отрезка.

Теорема Ролля. *Пусть функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируема на интервале* (a, b), *и пусть* $f(a) = f(b)$. *Тогда для некоторой точки* $c \in (a, b)$ *справедливо соотношение* $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция f непрерывна на компакте, то найдутся точки x_m и x_M, в которых функция f достигает своего минимума и максимума на $[a, b]$. Если хотя бы одна из этих точек внутренняя, то утверждение теоремы следует из теоремы Ферма. Если обе эти точки граничные, то получается, что минимум функции равен максимуму, то есть функция f постоянная и её производная равна 0 во всех точках интервала. □

Теорема Лагранжа. *Пусть функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда для некоторой точки* $c \in (a, b)$ *справедливо соотношение*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорему Лагранжа называют также «формула Лагранжа» и «формула конечных приращений ».

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $F(a) = F(b) = f(a)$. Значит, в некоторой точке $c \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(c) = 0$ □.

Следствие 1 (критерий постоянства). *Если* $f' = 0$ *на интервале, то* $f = const$. *Более того, если* $f' = g'$ *на интервале, то* $f - g = const$.

Следствие 2 (признак монотонности). *Если* $f' \geqslant 0$, *то функция* f *возрастает, если* $f' > 0$, *то функция строго возрастает. Если* $f' \leqslant 0$, *то функция* f *убывает, если* $f' < 0$, *то функция строго убывает.*

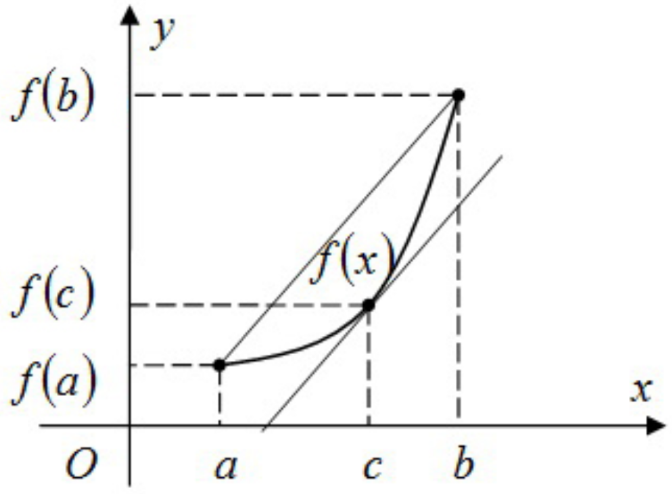


Рис. 5. К теореме Лагранжа.

Следствие 3 (условие Липшица).$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{(a,b)} |f'| \cdot |b - a|$.

Определение. *Говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица L, если при всех x, y справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$. Такую функцию называют «липшицева функция».*

Следствие 3 означает, что если у функции на промежутке есть ограниченная производная, то функция удовлетворяет условию Липшица.

Пример. Приведём любопытный пример. Оказывается, существует непрерывная монотонная функция из отрезка в отрезок, которая не является постоянной, но при этом имеет производную, равную нулю в почти всех точках. Эта функция называется *канторовой лестницей.* Её определение таково. В точках 0 и 1 значение функции принимается равным соответственно 0 и 1. Далее интервал $(0, 1)$ разбивается на три равные части $\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$. На среднем сегменте полагаем $F(x) = \frac{1}{2}$. Оставшиеся два сегмента снова разбиваются на три равные части каждый, и на средних сегментах $F(x)$ полагается равной $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Каждый из оставшихся сегментов снова делится на три части, и на внутренних сегментах $F(x)$ определяется как постоянная, равная среднему арифметическому между соседними, уже определенными значениями $F(x)$. На остальных точках единичного отрезка определяется по непрерывности. Нетрудно видеть, что производная канторовой лестницы определена и равна нулю во всех точках, кроме канторова множества.

Теорема Коши. *Пусть даны две функции f и g, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемые на интервале (a, b). Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Доказательство. Функция $F(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $F(a) = F(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Поэтому в некоторой точке $F'(c) = 0$. $\square$

Следствие. *Пусть, дополнительно, $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда $g(a) \neq g(b)$ и в условиях теоремы Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

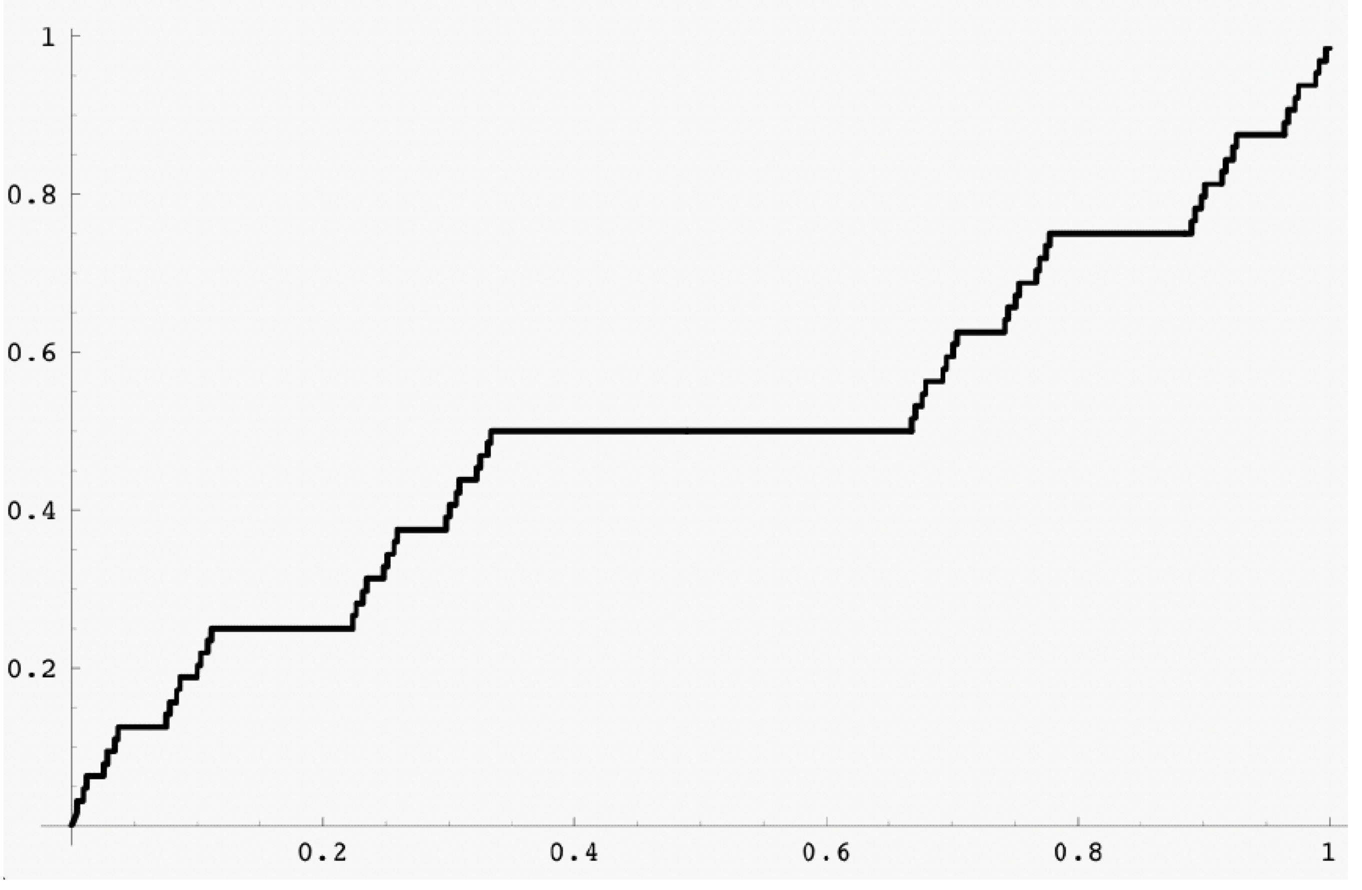


Рис. 6. Канторова лестница.

Доказательство. Соотношение $g(a) \neq g(b)$ следует из теоремы Ролля: если бы это было не так, в некоторой точке производная обратилась бы в 0. Требуемое равенство следует из теоремы Коши. $\square$

Раскрытие неопределённостей. Правило Лопиталя

В этом разделе мы вернёмся к вычислению пределов функции $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Самый простой случай — это когда функция f непрерывная в точке x_0. По определению непрерывности, этот предел равен $f(x_0)$ и всё. Этот случай настолько прост, что его можно не рассматривать. Трудности возникают, когда простых теорем о пределах оказывается недостаточно. Например, $f(x) = g(x)/h(x)$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = 0$ или $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \infty$. Ещё варианты сложностей: $f(x) = g(x) - h(x)$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \infty$; $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0, \lim_{x \to x_0} h(x) = \infty$. Рассмотрим именно такие случаи, все они называются «неопределённостями». Найти предел с неопределённостью называется «раскрыть неопределённость». Уже перечисленные неопределённости называются неопределённость $0/0, \infty/\infty, \infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$. Эквивалентными преобразованиями и упрощениями иногда часто можно сводить одни неопределённости к другим, самый просто пример: $0 \cdot \infty = 0/(1/\infty)$, последняя неопределённость уже имеет вид $0/0$.

Правило Лопиталя $[\frac{0}{0}]$.*Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и пусть $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Пусть $g'(x) \neq 0$ на этой окрестности. Пусть существует предел $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда существует предел $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

Функции f и g удовлетворяют всем условиям теоремы Коши, поэтому при некотором $\xi\in(x,x_0)$ справедливо равенство

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Осталось заметить, что при $x\to x_0$ также $\xi\to x_0$. $\square$

Есть и другие утверждения о ситуациях, в которых из существования предела отношения производных следует существование предела отношения самих функций. Их тоже называют правилом Лопиталя. Например, приведённое утверждение можно переформулировать для односторонних пределов. Сформулируем без доказательства ещё одно утверждение.

Правило Лопиталя $[\frac{\infty}{\infty}]$**.** *Пусть при* $x\in(x_0,x_0+h)$ *функции* f *и* g *определены и дифференцируемы и пусть* $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$ *при* $x\to x_0+0$. *Пусть* $g'(x)\neq 0$ *в* (x_0,x_0+h) *и пусть существует предел* $\lim_{x\to x_0+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. *Тогда существует предел* $\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Доказательство можно найти в книге Фихтенгольца, стр. 320-321.

Замечание. Правило Лопиталя применимо только в случае, когда исходная дробь является неопределённостью! Только в этом случае!

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\ln(1+x)-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\ln(1+x)-\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1/(1+x)+\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1/(1+x)^2+\cos x}{2}=\frac{3}{2}.$$

Лекция 16

Односторонняя производная. Теорема Дарбу

В этом разделе мы частично ответим на вопрос: «Для каких функций f найдется функция F такая, что $F' = f$?».

Бывает так, что у графика функции в некоторой точке есть «излом». Например, как у графика функции $y = |x|$ в нуле. На математическом языке это означает, что существуют односторонние пределы

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

не равные между собой. Аналогично, к исследованию таких пределов приводит определение производной в конце отрезка.

Величина $f'_+(x_0)$ называется *правой производной в точке* x_0, величина $f'_-(x_0)$ называется *левой производной в точке* x_0, обе эти величины называются *односторонними производными (аналогично пределам, правому, левому, одностороннему).*

Опеределение. *Про функцию f говорят, что она дифференцируема на отрезке, если она дифференцируема на интервале и в концах отрезка существуют односторонние производные.*

Теорема Дарбу. *Производная принимает все промежуточные значения.*

Лемма. *Пусть функция f дифференцируемая на $[a, b]$ и пусть односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ имеют разный знак. Тогда $f'(c) = 0$ в некоторой точке $c \in (a, b)$.*

Доказательство. Пусть, для определённости, $f'_+(a) > 0$ и $f'_-(b) < 0$. Тогда максимум функции f (который достигается в некоторой точке отрезка) не может быть ни в одном из концов отрезка. Пусть $f(c) = \max f$, тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство. Перейдём к доказательству теоремы Дарбу. Пусть $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ и $\xi \in [f'(x_1), f'(x_2)]$. Покажем, что $f'(c) = \xi$ в некоторой точке $c \in (x_1, x_2)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \xi x$. Так как $\xi \in [f'(x_1), f'(x_2)]$, то в точках x_1, x_2 производная этой функции принимает значения разных знаков. В силу доказанной леммы в некоторой точке с интервала (x_1, x_2) производная F' обращается в нуль, $f'(c) = \xi$. $\square$

Подчеркнём, что никаких предположений о непрерывности производной не было. Отсюда следует, что не все функции могут быть производными других функций: они должны удовлетворять свойству Дарбу — принимать все промежуточные значения, как это делали непрерывные функции.

Замечание. Из теоремы Дарбу следует, что все точки разрыва производной — разрывы второго рода.

Формула Тейлора

Производные высших порядков. Если функция f дифференцируема на интервале, то возникает другая функция f' — её производная. Если она дифференцируема, то эту функцию тоже можно дифференцировать. Производная от производной называется второй производной и обозначается f'' или $\frac{d^2f}{dx^2}$. Иногда вторую производную обозначают f''_{xx}. Точно также определяют следующие производные: $f''', f^{IV} = f^{(4)}, ..., f^{(n)}$. Обозначают либо римскими «цифрами», либо в круглых скобках.

Упражнение. Докажите формулу Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Формула Тейлора для многочлена. Рассмотрим многочлен P_n степени n. Ясно, что у многочлена степени n производная — также многочлен, только степени на 1 ниже. Таким образом, $P_n^{(n)}$ — это константа, $P_n^{(n+1)} = 0$. Выпишем формулы для производных многочлена, в частности их значений в нуле:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n, \quad P_n(0) = c_0;$$
$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3x_3^2 + \ldots + nc_n x^{n-1}, \quad P_n'(0) = c_1;$$
$$P_n''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3 x + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2}, \quad P_n''(0) = 2c_2;$$
$$\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n!c_n, \quad P_n^{(n)}(0) = n!c_n.$$

Выразим теперь (из формул правого столбца) коэффициенты c_k через значения производных в нуле и перепишем многочлен в виде:

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{1}{1!}P_n'(0)x + \frac{1}{2!}P''(0)x^2 + \frac{1}{3!}P'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$

Справедлива аналогичная, формально более общая, формула:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{1}{1!}P_n'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}P''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}P'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Первая формула называется *разложением многочлена Тейлора в нуле, вторая — в точке* x_0. Это точные формулы. Есть аналогичные формулы, справедливые не только для многочленов, но для любых функций, которые имеют достаточное количество производных в окрестности точки, в которой выписывается разложение.

Формула Тейлора.

Определение. *Пусть в окрестности точки x_0 задана функция $f(x)$, у которой есть n производных. Тогда по f можно выписать многочлен Тейлора*

$$T_n(x_0; x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Определение. *Функцию $r_n(x_0; x) = f(x) - T_n(x_0; x)$ называют n–м остаточным членом формулы Тейлора $f(x) = T_n(x_0; x) + r_n(x_0; x)$.*

Эта формула имеет практический смысл, если мы увидим, что остаточный член маленький, например, $r_n(x_0; x) = o((x-x_0)^n)$ при малых $x - x_0$.

Замечание. Многочлен Тейлора подобран так, чтобы у остаточного члена $r(x_0; x)$ его значение в точке x_0 и значения всех его производных до порядка n включительно были равны 0

$$r(x_0; x) = r'(x_0; x) = r''(x_0; x) = \ldots = r^{(n)}(x_0; x) = 0, \text{ при } x = x_0.$$

Теорема. *Пусть на некотором интервале U определена и $n+1$ раз дифференцируема функция f. Пусть $x_0 \in U$. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема на U, причём $\varphi'(x) \neq 0$ на U (кроме, может быть, точки x_0). Тогда для любой точки $x \in U$ найдётся точка ξ, лежащая между x и x_0 такая, что*

$$r_n(x_0; x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x_0 < x$. Случай $x_0 > x$ аналогичен.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - T_n(t;x) = f(x) - f(t) - \frac{1}{1!}f'(t)(x-t) - \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n$$

переменной t. Эта функция непрерывна и дифференцируема по крайней мере один раз во всех точках отрезка $[x_0, x]$, причём

$$F'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

Теперь применим к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ теорему Коши и получим, что в некоторой точке $\xi \in (x_0, x)$ справедливо равенство

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Теперь $F(x) = 0, F(x_0) = r_n(x_0; x)$ и теорема доказана. □

Остаточный член в форме Коши. Положим $\varphi(t) = x - t$, тогда

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Остаточный член в форме Лагранжа. Положим $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, тогда

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Замечание. Обратите внимание на то, что функции φ' при $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ обращаются в 0 при $t = x$. В условиях теоремы Коши, на которую мы ссылаемся, функция φ не должна обращаться в 0 на интервалах (x, x_0) или (x_0, x), про концы ничего не требуется.

Остаточный член в форме Пеано. Пусть на некотором интервале U определена и n раз дифференцируема функция f. Пусть $x_0 \in U$. Тогда

$$r_n(x_0; x) = o((x-x_0)^n).$$

Доказательство. Доказательство следует из замечания на странице 55 и следующей леммы, которая имеет самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть функция φ определена в окрестности точки x_0 и пусть*

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда $\varphi(x) = o((x-x_0)^n)$.

Доказательство. По индукции. При $n = 1$ утверждение леммы следует из формулы $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$, которая является определением дифференцируемости φ в точке x_0. Пусть утверждение леммы справедливо при $n = k$: из $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \ldots = \varphi^{(k)}(x_0) = 0$ следует $\varphi(x) = o((x-x_0)^k)$.

Теперь пусть $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \ldots = \varphi^{(k+1)}(x_0) = 0$. Функция $\psi(x) = \varphi'(x)$ имеет k производных и $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \psi''(x_0) = \ldots = \psi^{(k)}(x_0) = 0$. По предположению индукции $\psi(x) = o((x-x_0)^k)$. Теперь по теореме Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \psi(\xi)(x-x_0) = o((\xi-x_0)^k)(x-x_0) = o((x-x_0)^{k+1}), \quad \varphi(x_0) = 0. \ \square$$

□

Связь формы Пеано остаточного члена с формами Лагранжа и Коши лучше всего видна при дополнительном предположении о непрерывности функции $f^{(n+1)}$. В этом случае

$$|r_n(x_0;x)| \leqslant |f^{(n+1)}| \cdot |x-x_0|^{n+1}$$

и получается даже более сильное (чем форма Пеано) утверждение $r_n(x_0;x) = O((x-x_0)^{n+1})$.

Замечание. Многочлен Тейлора $T_n(x_0;x)$ — единственный многочлен степени n, удовлетворяющий соотношению $f(x)-P_n(x) = o((x-x_0)^n)$. В самом деле, из соотношений $f(x)-P_n(x) = o((x-x_0)^n)$ и $f(x)-T_n(x_0;x) = o((x-x_0)^n)$ следует совпадение многочленов $P_n(x)$ и $T_n(x_0;x)$ переменной x. Это верно, так как если многочлен $P_n(x)-T_n(x_0;x)$ есть $o((x-x_0)^n)$, то он есть тождественный нуль.

Резюмируем содержание последних конструкций.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Пусть функция f определена и n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Пусть функция f определена и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Формулу Тейлора в нуле (при $x_0 = 0$) называют *формулой Маклорена.*

Ряд Тейлора. Пусть функция f имеет в окрестности точки x_0 все производные. Тогда можно выписать ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \ldots$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0.*

Его можно выписать для любой бесконечно дифференцируемой функции f . Не надо думать, что ряд Тейлора всегда "сходится"к функции, по которой он построен.

Контрпример. Функция $f(x) = e^{-x^{-2}}, (f(0) = 0)$ бесконечно дифференцируема, в том числе в нуле, где все её производные равны нулю. То есть ряд Тейлора — нулевой ряд. А функция нулю равна только в нуле.

Замечание. Формулы и ряд Тейлора чётной функции содержат только слагаемые с чётными степенями, формулы и ряд Тейлора нечётной функции содержат только слагаемые с нечётными степенями.

Формулы Тейлора, которые надо знать на память.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}).$$