Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Каждой хордовой диаграмме (ориентируемому вложенному графу с одной вершиной) соостветствует простой граф — ее граф пересечений. Произведение графов пересечений это их несвязное объединение. Склеив две хордовые диаграммы по несущей окружности, мы получаем новую хордовую диаграмму, граф пересечения которой — произведение двух графов пересечений склеиваемых хордовых диаграмм. Поэтому хотелось бы рассматривать склейку хордовых диаграмм как их произведение — отображение в графы пересечений тогда будет гомоморфизмом алгебр.

Каждой хордовой диаграмме (ориентируемому вложенному графу с одной вершиной) соответствует простой граф — ее граф пересечений. Произведение графов пересечений это их несвязное объединение. Склеив две хордовые диаграммы по несущей окружности, мы получаем новую хордовую диаграмму, граф пересечения которой — произведение двух графов пересечений склеиваемых хордовых диаграмм. Поэтому хотелось бы рассматривать склейку хордовых диаграмм как их произведение — отображение в графы пересечений тогда будет гомоморфизмом алгебр.

Проблема в том, что склейка двух хордовых диаграмм определена неоднозначно — результат зависит от выбора места, где мы разрываем каждую из окружностей.

Каждой хордовой диаграмме (ориентируемому вложенному графу с одной вершиной) соответствует простой граф — ее граф пересечений. Произведение графов пересечений это их несвязное объединение. Склеив две хордовые диаграммы по несущей окружности, мы получаем новую хордовую диаграмму, граф пересечения которой — произведение двух графов пересечений склеиваемых хордовых диаграмм. Поэтому хотелось бы рассматривать склейку хордовых диаграмм как их произведение — отображение в графы пересечений тогда будет гомоморфизмом алгебр.

Проблема в том, что склейка двух хордовых диаграмм определена неоднозначно — результат зависит от выбора места, где мы разрываем каждую из окружностей.

Задача. Определите копроизведение хордовой диаграммы так, чтобы сопоставление хордовой диаграмме ее графа пересечений было гомоморфизмом коумножения.

Каждой хордовой диаграмме (ориентируемому вложенному графу с одной вершиной) сооcтветствует простой граф — ее граф пересечений. Произведение графов пересечений это их несвязное объединение. Склеив две хордовые диаграммы по несущей окружности, мы получаем новую хордовую диаграмму, граф пересечения которой — произведение двух графов пересечений склеиваемых хордовых диаграмм. Поэтому хотелось бы рассматривать склейку хордовых диаграмм как их произведение — отображение в графы пересечений тогда будет гомоморфизмом алгебр.

Проблема в том, что склейка двух хордовых диаграмм определена неоднозначно — результат зависит от выбора места, где мы разрываем каждую из окружностей.

Задача. Определите копроизведение хордовой диаграммы так, чтобы сопоставление хордовой диаграмме ее графа пересечений было гомоморфизмом коумножения.

Точно так же, не удается разумно определить умножение вложенных графов. Такое умножение должно было бы склеивать две вершины — по одной из каждого графа, — с созранением относительного циклического порядка полуребер. Но нет способа выбрать склеиваемые вершины.

Вместо определения алгебры Хопфа вложенных графов можно определить алгебру Хопфа дельта-матроидов и различные ее варианты.

Вместо определения алгебры Хопфа вложенных графов можно определить алгебру Хопфа дельта-матроидов и различные ее варианты.

Обозначим через $\mathcal{D}_n$ векторное пространство, порожденное классами изоморфизмов дельта-матроидов на n элементах, $n = 0, 1, 2, \dots$. (Напомним, что две системы множеств $D_1 = (E_1; \Phi_1)$ и $D_2 = (E; \Phi_2)$ изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение $f : E_1 \to E_2$, переводящую систему множеств Φ_1 в Φ_2). Градуированное векторное пространство

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots$$

наделяется градуированным умножением $m : \mathcal{D}_k \otimes \mathcal{D}_\ell \to \mathcal{D}_{k+\ell}$, которое на дельта-матроидах задается правилом $D_1 D_2 = (E_1 \sqcup E_2; \Phi)$, где $\Phi = \{\phi_1 \sqcup \phi_2 | \phi_1 \in \Phi_1, \phi_2 \in \Phi_2\}$. Это умножение коммутативно.

Вместо определения алгебры Хопфа вложенных графов можно определить алгебру Хопфа дельта-матроидов и различные ее варианты.

Обозначим через $\mathcal{D}_n$ векторное пространство, порожденное классами изоморфизмов дельта-матроидов на n элементах, $n = 0, 1, 2, \dots$. (Напомним, что две системы множеств $D_1 = (E_1; \Phi_1)$ и $D_2 = (E; \Phi_2)$ изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение $f : E_1 \to E_2$, переводящую систему множеств Φ_1 в Φ_2). Градуированное векторное пространство

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots$$

наделяется градуированным умножением $m : \mathcal{D}_k \otimes \mathcal{D}_\ell \to \mathcal{D}_{k+\ell}$, которое на дельта-матроидах задается правилом $D_1 D_2 = (E_1 \sqcup E_2; \Phi)$, где $\Phi = \{\phi_1 \sqcup \phi_2 | \phi_1 \in \Phi_1, \phi_2 \in \Phi_2\}$. Это умножение коммутативно.

Definition

Дельта-матроид называется *связным*, если он не представляется в виде произведения двух дельта-матроидов с меньшим числом элементов.

Лекция 9. Коумножение дельта-матроидов

Для превращения алгебры $\mathcal{D}$ в алгебру Хопфа необходимо задать на ней коумножение $\mu : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$. Определим для дельта-матроида $D = (E; \Phi)$ его копроизведение равенством

$$\mu(D) = \sum_{U \sqcup W = E} D|_U \otimes D|_W,$$

где *ограничение* $D|_U = (U; \Phi|_U)$ системы множеств D на подмножество $U \subset E$ его базового множества определяется так:

$$\Phi|_U = \{\phi \in \Phi | \phi \subset U\}.$$

Лекция 9. Коумножение дельта-матроидов

Для превращения алгебры $\mathcal{D}$ в алгебру Хопфа необходимо задать на ней коумножение $\mu : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$. Определим для дельта-матроида $D = (E; \Phi)$ его копроизведение равенством

$$\mu(D) = \sum_{U \sqcup W = E} D|_U \otimes D|_W,$$

где *ограничение* $D|_U = (U; \Phi|_U)$ системы множеств D на подмножество $U \subset E$ его базового множества определяется так:

$$\Phi|_U = \{\phi \in \Phi | \phi \subset U\}.$$

Theorem

Ограничение дельта-матроида на произвольное подмножество его базового множества является дельта-матроидом.

Лекция 9. Коумножение дельта-матроидов

Для превращения алгебры $\mathcal{D}$ в алгебру Хопфа необходимо задать на ней коумножение $\mu : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$. Определим для дельта-матроида $D = (E; \Phi)$ его копроизведение равенством

$$\mu(D) = \sum_{U \sqcup W = E} D|_U \otimes D|_W,$$

где *ограничение* $D|_U = (U; \Phi|_U)$ системы множеств D на подмножество $U \subset E$ его базового множества определяется так:

$$\Phi|_U = \{\phi \in \Phi | \phi \subset U\}.$$

Theorem

Ограничение дельта-матроида на произвольное подмножество его базового множества является дельта-матроидом.

Theorem

Коумножение $\mu : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ превращает алгебру $\mathcal{D}$ дельта-матроидов в алгебру Хопфа.

Theorem

Отображение $\delta : \mathcal{G} \to \mathcal{D}$, сопоставляющее каждому графу его дельта-матроид, является гомоморфизмом алгебр Хопфа.

Как следствие, любой гомоморфизм алгебры Хопфа дельта-матроидов определяет и гомоморфизм алгебры Хопфа графов.

Лекция 9. Варианты алгебр Хопфа дельта-матроидов

Рассматривая различные варианты дельта-матроидов, мы получаем различные варианты их алгебры Хопфа.

Лекция 9. Варианты алгебр Хопфа дельта-матроидов

Рассматривая различные варианты дельта-матроидов, мы получаем различные варианты их алгебры Хопфа.

Example

Четные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{D}^e \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Лекция 9. Варианты алгебр Хопфа дельта-матроидов

Рассматривая различные варианты дельта-матроидов, мы получаем различные варианты их алгебры Хопфа.

Example

Четные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{D}^e \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Example

Бинарные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Лекция 9. Варианты алгебр Хопфа дельта-матроидов

Рассматривая различные варианты дельта-матроидов, мы получаем различные варианты их алгебры Хопфа.

Example

Четные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{D}^e \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Example

Бинарные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Example

Четные бинарные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Лекция 9. Варианты алгебр Хопфа дельта-матроидов

Рассматривая различные варианты дельта-матроидов, мы получаем различные варианты их алгебры Хопфа.

Example

Четные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{D}^e \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Example

Бинарные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Example

Четные бинарные дельта-матроиды порождают подалгебру Хопфа $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{D}$ в алгебре Хопфа дельта-матроидов.

Согласно теореме Милнора–Мура, все эти алгебры Хопфа полиномиальны.

Definition

Комбинаторной алгеброй Хопфа называется пара $(\mathcal{H}, h)$, состоящая из коммутативной кокоммутативной связной градуированной алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ и характера h на ней, т.е. линейного мультипликативного отображения $h : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$.

Definition

Комбинаторной алгеброй Хопфа называется пара $(\mathcal{H}, h)$, состоящая из коммутативной кокоммутативной связной градуированной алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ и характера h на ней, т.е. линейного мультипликативного отображения $h : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$.

Example

Алгебра Хопфа многочленов $\mathbb{C}[p_1, p_2, p_3, \dots]$ превращается в комбинаторную алгебру Хопфа $(\mathcal{P}, \zeta)$, если положить $\zeta(p_k) = 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Этот характер ζ на алгебре Хопфа многочленов называется *каноническим*. Он переводит каждый многочлен в сумму его коэффициентов.

Лекция 9. Полиномиальные инварианты комбинаторных алгебр

Всякой комбинаторной алгебре Хопфа $(\mathcal{H}, h)$ можно сопоставить ее гомоморфизм $\tau_h : (\mathcal{H}, h) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ в комбинаторную алгебру Хопфа многочленов. Для алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$ этот гомоморфизм выглядит так:

$$\tau_h : G \mapsto \sum_{\alpha \vdash V(G)} \left(\prod_{\alpha_i \in \alpha} h(G|_{\alpha_i}) \right) M_{|\alpha|}(p).$$

Здесь суммирование идет по всем разбиениям α множества вершин $V(G)$ графа G на непустые подмножества, и через $|\alpha|$ обозначено соответствующее разбиение количества вершин $|V(G)|$, $|\alpha| \vdash |V(G)|$. Многочлен $M_{|\alpha|}(p)$ это выраженный через переменные $p_i = \sum x_j^i$ элементарный симметрический многочлен

$$M_{|\alpha|}(x_1, x_2, \dots) = \sum x_{i_1}^{|\alpha_1|} x_{i_2}^{|\alpha_2|} \dots,$$

где суммирование идет по всем наборам попарно различных индексов $i_1, i_2, \dots$.

Example

$$M_k = \sum x_i^k = p_k;$$

Example

$$
\begin{aligned}
M_k &= \sum x_i^k = p_k;\\
M_{k,\ell} &= \sum_{i\neq j} x_i^k x_j^\ell = p_k p_\ell - p_{k+\ell};
\end{aligned}
$$

Example

$$\begin{aligned}
M_k &= \sum x_i^k = p_k;\\
M_{k,\ell} &= \sum_{i\neq j} x_i^k x_j^\ell = p_k p_\ell - p_{k+\ell};\\
M_{k,\ell,n} &= \sum_{i\neq j, j\neq s, s\neq k} x_i^k x_j^\ell x_s^n = p_k p_\ell p_n - p_{k+\ell}p_n - p_{k+n}p_\ell - p_{\ell+n}p_k + 2p_{k+\ell+n}.
\end{aligned}$$

Example

Посмотрим, как на маленьких графах работает формула для гомоморфизма τ_h.

Example

$$\begin{aligned}
M_k &= \sum x_i^k = p_k;\\
M_{k,\ell} &= \sum_{i\neq j} x_i^k x_j^\ell = p_k p_\ell - p_{k+\ell};\\
M_{k,\ell,n} &= \sum_{i\neq j, j\neq s, s\neq k} x_i^k x_j^\ell x_s^n = p_k p_\ell p_n - p_{k+\ell} p_n - p_{k+n} p_\ell - p_{\ell+n} p_k + 2p_{k+\ell+n}.
\end{aligned}$$

Example

Посмотрим, как на маленьких графах работает формула для гомоморфизма τ_h.

$$\tau_h(K_1) = h(K_1)M_1 = h(K_1)p_1;$$

Example

$$
\begin{aligned}
M_k &= \sum x_i^k = p_k; \\
M_{k,\ell} &= \sum_{i\neq j} x_i^k x_j^\ell = p_k p_\ell - p_{k+\ell}; \\
M_{k,\ell,n} &= \sum_{i\neq j, j\neq s, s\neq k} x_i^k x_j^\ell x_s^n = p_k p_\ell p_n - p_{k+\ell} p_n - p_{k+n} p_\ell - p_{\ell+n} p_k + 2p_{k+\ell+n}.
\end{aligned}
$$

Example

Посмотрим, как на маленьких графах работает формула для гомоморфизма τ_h.

$$
\begin{aligned}
\tau_h(K_1) &= h(K_1)M_1 = h(K_1)p_1; \\
\tau_h(K_1^2) &= h(K_1^2)M_2 + h(K_1)^2 M_{1^2} = h(K_1)^2 p_2 + h(K_1)^2(p_1^2 - p_2) = h(K_1)^2 p_1^2;
\end{aligned}
$$

Example

$$\begin{aligned} M_k &= \sum x_i^k = p_k; \\ M_{k,\ell} &= \sum_{i\neq j} x_i^k x_j^\ell = p_k p_\ell - p_{k+\ell}; \\ M_{k,\ell,n} &= \sum_{i\neq j, j\neq s, s\neq k} x_i^k x_j^\ell x_s^n = p_k p_\ell p_n - p_{k+\ell} p_n - p_{k+n} p_\ell - p_{\ell+n} p_k + 2p_{k+\ell+n}. \end{aligned}$$

Example

Посмотрим, как на маленьких графах работает формула для гомоморфизма τ_h.

$$\begin{aligned} \tau_h(K_1) &= h(K_1)M_1 = h(K_1)p_1; \\ \tau_h(K_1^2) &= h(K_1^2)M_2 + h(K_1)^2 M_{1^2} = h(K_1)^2 p_2 + h(K_1)^2(p_1^2 - p_2) = h(K_1)^2 p_1^2; \\ \tau_h(K_2) &= h(K_2)M_2 + h(K_1)^2 M_{1^2} = h(K_2)p_2 + h(K_1)^2(p_1^2 - p_2). \end{aligned}$$

Theorem

Пусть $\xi : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ *— характер, который переводит граф* K_1 *с одной вершиной в* 1*, а любой граф, имеющий ребра, в* 0*. Тогда гомоморфизм* $\tau_\xi : (\mathcal{G}, \xi) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ *это симметризованный хроматический многочлен Стенли.*

Theorem

Пусть $\xi : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ *— характер, который переводит граф* K_1 *с одной вершиной в* 1*, а любой граф, имеющий ребра, в* 0*. Тогда гомоморфизм* $\tau_\xi : (\mathcal{G}, \xi) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ *это симметризованный хроматический многочлен Стенли.*

Заменив h на ξ в подсчитанных нами ранее примерах и приняв во внимание, что $\xi(K_1) = \xi(K_1^2) = \xi(K_1)^2 = 1$, $\xi(K_2) = 0$, получаем $\tau_\xi(K_1) = p_1$, $\tau_\xi(K_1^2) = p_1^2$, $\tau_\xi(K_2) = p_1^2 - p_2$, в согласии с ранее полученными результатами.

Theorem

Пусть $\xi : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ *— характер, который переводит граф* K_1 *с одной вершиной в* 1, *а любой граф, имеющий ребра, в* 0. *Тогда гомоморфизм* $\tau_\xi : (\mathcal{G}, \xi) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ *это симметризованный хроматический многочлен Стенли.*

Заменив h на ξ в подсчитанных нами ранее примерах и приняв во внимание, что $\xi(K_1) = \xi(K_1^2) = \xi(K_1)^2 = 1$, $\xi(K_2) = 0$, получаем $\tau_\xi(K_1) = p_1$, $\tau_\xi(K_1^2) = p_1^2$, $\tau_\xi(K_2) = p_1^2 - p_2$, в согласии с ранее полученными результатами.

Доказательство.

Theorem

Пусть $\xi:\mathcal{G}\to\mathbb{C}$ — характер, который переводит граф K_1 с одной вершиной в 1, а любой граф, имеющий ребра, в 0. Тогда гомоморфизм $\tau_\xi:(\mathcal{G},\xi)\to(\mathcal{P},\zeta)$ это симметризованный хроматический многочлен Стенли.

Заменив h на ξ в подсчитанных нами ранее примерах и приняв во внимание, что $\xi(K_1)=\xi(K_1^2)=\xi(K_1)^2=1$, $\xi(K_2)=0$, получаем $\tau_\xi(K_1)=p_1$, $\tau_\xi(K_1^2)=p_1^2$, $\tau_\xi(K_2)=p_1^2-p_2$, в согласии с ранее полученными результатами.

Доказательство. Нетривиальный вклад в сумму, задающую гототорфизм τ_ξ, дают только такие разбиения α множества вершин графа G на подмножества, в которых подграф $G|_{\alpha_j}$, индуцированный каждым подмножеством α_j, является дискретным. Это означает, что вершины этого подграфа мы можем покрасить в один цвет x_{i_j} из множества цветов $X=\{x_1,x_2,\dots\}$. Покрасив вершины каждого из подмножеств α_j в свой цвет, мы получаем правильную раскраску множества вершин $V(G)$. Сумма соответствующих мономов от переменных X, т.е. функция $M_{|\alpha|}$ и есть вклад данного разбиения α в симметризованный хроматический многочлен Стенли $S_G(x_1,x_2,\dots)$.

Лекция 9. Симметризованный хроматический многочлен Стенли дельта-матроидов

Выражение симметризованного хроматического многочлена Стенли графов через характер алгебры Хопфа графов позволяет определить его и для дельта-матроидов. Ограничимся четными дельта-матроидами. Определим характер $\nu : \mathcal{D}^e \to \mathbb{C}$ равенством

$$\nu(D) = \begin{cases} 1 & \text{если } D = (\{1\}, \{\emptyset\}) \\ x & \text{если } D = (\{1\}, \{\{1\}\}) \\ 0 & \text{если } D \text{ — связный на более, чем одном элементе} \end{cases}$$

Соответствующий этому характеру гомоморфизм комбинаторных алгебр Хопфа $(\mathcal{D}^e, \zeta) \to (\mathcal{P}, \xi)$ называется *симметризованным хроматическим многочленом Стенли дельта-матроидов*. Он принимает значения в кольце многочленов от бесконечного числа переменных $p_1, p_2, \dots$ и от дополнительной переменной x.

- Докажите, что а) ограничение дельта-матроида на любое подмножество является дельта-матроидом; б) ограничение четного дельта-матроида на любое подмножество является четным дельта-матроидом; в) ограничение бинарного дельта-матроида на любое подмножество является бинарным дельта-матроидом.

- Докажите, что а) ограничение дельта-матроида на любое подмножество является дельта-матроидом; б) ограничение четного дельта-матроида на любое подмножество является четным дельта-матроидом; в) ограничение бинарного дельта-матроида на любое подмножество является бинарным дельта-матроидом.
- Найдите размерности пространств а) $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$; б) $\mathcal{D}_1^e, \mathcal{D}_2^e, \mathcal{D}_3^e$; в) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$; г) $\mathcal{B}_1^e, \mathcal{B}_2^e, \mathcal{B}_3^e$.

- Найдите размерности пространств примитивных элементов а) $P(\mathcal{D}_1), P(\mathcal{D}_2), P(\mathcal{D}_3)$; б) $P(\mathcal{D}_1^e), P(\mathcal{D}_2^e), P(\mathcal{D}_3^e)$; в) $P(\mathcal{B}_1), P(\mathcal{B}_2), P(\mathcal{B}_3)$; г) $P(\mathcal{B}_1^e), P(\mathcal{B}_2^e), P(\mathcal{B}_3^e)$.

- Найдите размерности пространств примитивных элементов а) $P(\mathcal{D}_1), P(\mathcal{D}_2), P(\mathcal{D}_3)$; б) $P(\mathcal{D}_1^e), P(\mathcal{D}_2^e), P(\mathcal{D}_3^e)$; в) $P(\mathcal{B}_1), P(\mathcal{B}_2), P(\mathcal{B}_3)$; г) $P(\mathcal{B}_1^e), P(\mathcal{B}_2^e), P(\mathcal{B}_3^e)$.
- Пусть во вложенном графе Γ имеется вершина, разделение которой на две дает два вложенных графа Γ_1, Γ_2. Докажите, что дельта-матроид вложенного графа Γ является произведением дельта-матроидов вложенных графов Γ_1, Γ_2. В частности, дельта-матроид соединения двух вложенных графов Γ_1, Γ_2 по одной вершине не зависит ни от выбора этой вершины в каждом из вложенных графов, ни от места соединения выбранных вершин.

- Пусть $h : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ — произвольный характер. Вычислите образы гомоморфизма $\tau_h : (\mathcal{G}, h) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ для графов а) A_3; б) K_3.

Семинары 9. Задачи

- Пусть $h : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ — произвольный характер. Вычислите образы гомоморфизма $\tau_h : (\mathcal{G}, h) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ для графов а) A_3; б) K_3.
- Какому характеру соответствует многочлен Абеля графов?

Семинары 9. Задачи

- Пусть $h : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ — произвольный характер. Вычислите образы гомоморфизма $\tau_h : (\mathcal{G}, h) \to (\mathcal{P}, \zeta)$ для графов а) A_3; б) K_3.
- Какому характеру соответствует многочлен Абеля графов?
- Определим *невырожденность* $\nu(D)$ дельта-матроида $D = (E; \Phi)$ равенством

$$\nu(D) = \begin{cases} 1 & \text{если } E \in \Phi \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Какой полиномиальный инвариант дельта-матроидов соответствует этому характеру?

Семинары 9. Задачи

- Удовлетворяет ли симметризованный хроматический многочлен Стенли дельта-матроидов какому-либо соотношению удаления-стягивания?