Семинар 8.

Задача 1. Пусть C – невырожденная коника над любым полем $\mathbf{k}$, $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$. Тогда в произвольной системе координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$ уравнение коники C имеет вид:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_0\ x_1\ x_2)$ – вектор-строка координат точки X, и A - симметрическая матрица 3×3 с условием $\det A \neq 0$, то есть $F(\mathbf{x})$ – невырожденная квадратичная форма от переменных $(x_0,\ x_1,\ x_2)$. Предположим, что на конике C имеются по крайней мере две различные точки A и B. (Над произвольным полем это условие не всегда выполнено. Например, над полем $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ коника $C = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$, для которой A - единичная матрица 3×3, не имеет точек.) Докажите, что существует такое проективное соответствие между пучками $f : \check{A} \xrightarrow{\sim} \check{B}$, что коника C получается из этого соответствия по конструкции Штейнера.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи пусть Y - точка вне C, имеющая строку проективных координат $\mathbf{y} = (y_0\ y_1\ y_2)$. Рассмотрим в $\mathbb{P}^2$ прямую $\mathbf{p}_Y$ с уравнением

$$\mathbf{p}_Y = \{\mathbf{b}\mathbf{x}^T = 0\}, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{b} = \mathbf{y}A. \tag{3}$$

Прямая $\mathbf{p}_Y$ называется *полярой точки Y относительно коники C*. Докажите, что для любой прямой l через точку Y, пересекающей конику C в двух различных точках Q и R, пара точек QR гармонически делит пару точек YZ, где $Z = l \cap \mathbf{p}_Y$. Другими словами, поляра $\mathbf{p}_Y$ совпадает с полярой, определенной ранее в задании к семинару 7.

Задача 3. Уравнение (2) и (3) показывают, что точку со строкой координат $\mathbf{b}$ можно рассматривать как точку в двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. Таким образом, определено отображение (очевидно, проективное, так как матрица A невырождена)

$$P_C :\ \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sim} \check{\mathbb{P}}^2, \quad \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}A. \tag{4}$$

Оно называется *полярным отображением, задаваемым коникой C*. При этом $\check{C} = P_C(C)$ есть коника в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, называемая *двойственной коникой к конике C*.
1) Покажите, что точки коники $\check{C}$ соответствуют прямым в $\mathbb{P}^2$, касательным к конике C.
2) Найдите уравнение двойственной коники $\check{C}$.

Задача 4. 1) Докажите, что коника, двойственная к конике $\check{C}$, совпадает с коникой C (*принцип двойственности*):

$$\check{\check{C}} = C.$$

2) Докажите, что полярное отображение, задаваемое коникой $\check{C}$, является обратным к полярному отображению, задаваемому коникой C.