ОДУ-2022. Семинар №12

(21/22/25 ноября)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Линеаризация автономной системы вблизи положения равновесия

Пусть дана автономная система:

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

В правой части стоит гладкая функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что $x^0 \in \Omega$ — её особая точка (положение равновесия), если $f(x^0) = 0$: в этом случае постоянная функция $x(t) \equiv x^0$ является решением этой системы.

Мы будем рассматривать систему (1) при значениях x, близких к x^0. Тогда естественно приблизить нелинейную функцию f линейной:

$$f(x) = 0 + f'(x^0)(x - x^0) + o(|x - x^0|), \quad \tilde{f}(x) = f'(x^0)(x - x^0). \tag{2}$$

В этой формуле $f'(x^0) = df|_{x^0}$ — дифференциал функции f в точке x^0. В координатах функция $\tilde{f}$ запишется следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1(x^0) & \cdots & \partial f_1/\partial x_n(x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1(x^0) & \cdots & \partial f_n/\partial x_n(x^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}.$$

Система

$$\dot{z} = f'(x_0)z \tag{3}$$

называется *линеаризацией* системы (1). Естественно надеяться, что для начальных условий, близких к x_0, решение $x(t)$ исходной системы будет близко к $z(t) + x_0$, где $z(t)$ — решение (3). В действительности ситуация сложнее: фазовый портрет (3) будет получаться (локально) деформацией фазового портрета (1) только для гиперболических особых точек.

Особая точка называется *гиперболической*, если матрица линеаризации $(\partial f_i/\partial x_j(x^0)))$ не имеет собственных значений λ с нулевой действительной частью.

Задача 12.1. Какие виды особых точек в линейных 2×2-системах гиперболичны?

Решение. Все виды узлов, седло, фокусы. Напротив, центр негиперболичен (у него $\lambda = \pm i\omega$). ◄

Теорема. *(Гробмана—Хартмана) Если система* (1) *имеет гиперболическую особую точку* x_0*, то существует гомеоморфизм* $h\colon U \to V$*, где* U *— окрестность* x_0*,* V *— окрестность* 0*, переводящий решения системы* (1) *в решения её линеаризации* (3)*.*

Обратите внимание, что сопрягающее отображение h является лишь гомеоморфизмом, а не диффеоморфизмом, а с этой точки зрения всё богатство гиперболических линейных систем на плоскости сводится к трём типам:

1. устойчивые узлы всех видов, устойчивый фокус;
2. седло;
3. неустойчивые узлы всех видов, неустойчивый фокус.

Они различаются тем, для какого множества начальных условий траектория при $t \to +\infty$ будет стремиться к 0 (соответственно, двумерного=открытого, одномерного и нульмерного=одноточечного множества). Аналогично, при $t \to -\infty$ будет стремление к 0 для множества дополнительной размерности (соответственно, 0, 1, 2). Наличие таких множеств дополнительных размерностей — ключевое свойство гиперболических систем.

Результаты о гладкой классификации (с точностью до диффеоморфизма) более сложны, и мы их здесь строго не формулируем. Однако в основном детали фазового потрета сохраняются.

Седло: по-прежнему имеет две гладкие кривые (*сепаратрисы*), касающиеся собственных векторов матрицы $f'(x_0)$, состоящий из решений, выходящих или входящих в x_0.

Невырожденный узел: большинство (все кроме двух) решений по-прежнему касаются собственного подпространства с наименьшим по модулю собственным значением.

Вырожденный узел: все решения по-прежнему касаются собственного подпространства матрицы $f'(x_0)$.

Дикритический узел: все решения по-прежнему входят в x_0 со всевозможными направлениями касательных.

Фокус: решения по-прежнему подходят к x_0, делая бесконечное число оборотов (в том же направлении, что и для линейной системы).

Это позволяет понять качественное поведение решений вблизи гиперболических особых точек: нужно линеаризовать систему, нарисовать локальный фазовый портрет линейной части, а затем слегка его деформировать (так, что решения-лучи становятся просто гладкими кривыми с той же касательной).

Задача 12.2. Нарисуйте фазовый портрет вблизи особой точки $(0, 0)$ системы

$$\dot{x} = (1-x)^2 - \cos y, \quad , \dot{y} = \sin x - y.$$

Решение. Линеаризация имеет вид $\dot{x} = -2x$, $\dot{y} = x - y$. Её матрица —

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а собственные значения и векторы — $\lambda_1 = -2$, $v_1 = (1, -1)^T$; $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (0, 1)^T$. Это невырожденный устойчивый узел, фазовые кривые (не лежащие на $\mathbb{R}v_1$) прижимаются к вектору v_2. Аналогичное поведение будет и для исходной нелинейной системы. ◀

Задача 12.3. Нарисуйте фазовый портрет системы вблизи особых точек

$$\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \quad \dot{y} = (5x - 3)y.$$

Решение. Из уравнения $(5x-3)y = 0$ особые точки лежат на прямых $x = 3/5$ и $y = 0$, подставляя это в первое уравнение, получаем четыре точки: $(\pm 1, 0)$, $(3/5, \pm 4/5)$.

Линеаризуем систему в каждой из точек. Один возможный способ — вычислить в общем виде матрицу частных производных и затем подставить в неё требуемые точки.

Мы поступим по-другому: подставим в правую часть $(x, y) = (x^0, y^0) + (\xi, \eta)$ и разложим в ряд Тейлора по (ξ, η), отбрасывая члены выше первого порядка. В точках $(x^0, y^0) = (\pm 1, 0)$ имеем $x = \pm 1 + \xi$, $y = \eta$ и

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 1 - (\pm 1 + \xi)^2 - \eta^2 = 1 - 1 \mp 2\xi + \dots, \\ \dot{\eta} &= (5(\pm 1 + \xi) - 3)\eta = (-3 \pm 5)\eta + \dots. \end{aligned}$$

Соответственно, получаем такие матрицы линеаризации

$$(-1, 0)\colon \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Это седло, его собственные векторы будут базисными. Неустойчивая сепаратриса касается оси абсцисс, устойчивая — оси ординат. (На самом деле для этого уравнения неустойчивая сепаратриса будет совпадать с осью абсцисс: если $y = 0$, то $\dot{y} = 0$, то есть ось абсцисс состоит из решений.)

$$(1,0)\colon \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Это также седло, собственные векторы будут базисными. Неустойчивая сепаратриса касается оси ординат, устойчивая касается оси абсцисс (и даже совпадает с ней).

Аналогичным образом исследуются и точки $(3/5, \pm 4/5)$. Линеаризация здесь

$$\begin{pmatrix} -6/5 & \mp 8/5 \\ \pm 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda^2 + (6/5)\lambda + (32/5) = 0$, $D < 0$. Собственные значения имеют вид $(-3 \pm i\sqrt{151})/5$. Это устойчивые фокусы. Осталось разобраться с направлением вращения: в точке $(\xi, \eta) = (0, 1)$ имеем $\dot{\xi} = \mp 8/5$, $\dot{\eta} = 0$. Значит, вокруг точки $(3/5, 4/5)$ вращение происходит против часовой стрелки, а вокруг $(3/5, -4/5)$ — по часовой. (Различие направлений опять-таки неудивительно: наша система переходит в себя при симметрии относительно оси абсцисс $(x, y) \mapsto (x, -y)$.) ◀